

ALHE  
Jarosław Arabas  
Metaheurystyki i ograniczenia

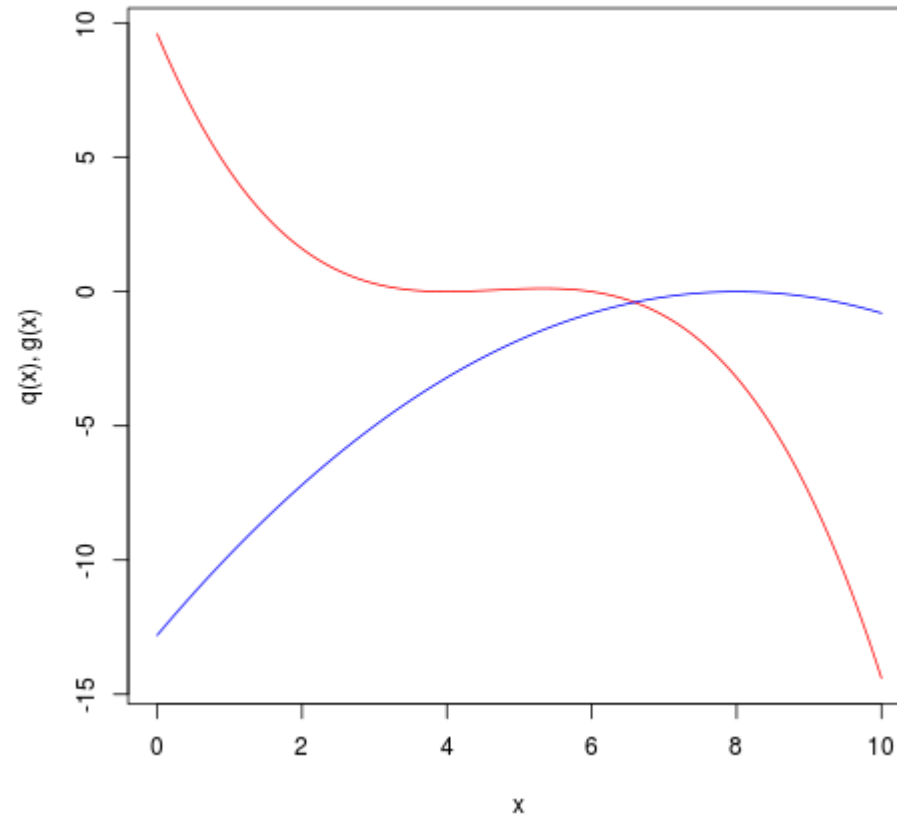
# Optymalizacja ciągła

- Funkcja celu  $q: F \rightarrow R$
- Zbiór dopuszczalny  $F \subseteq R^n$
- Metryka  $\delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$
- Norma euklidesowa  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \left( \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$
- Każdy punkt dopuszczalny spełnia:
  - Ograniczenia kostkowe  $l_i \leq x_i \leq u_i \quad i = 1 \dots n$
  - Ograniczenia funkcyjne  $g_j(\mathbf{x}) \leq 0$   
 $h_j(\mathbf{x}) = 0$

# Kłopot z ograniczeniami

- Jak zainicjować poszukiwania (generacja punktu dopuszczalnego)
- Jak zapewnić dopuszczalność kolejno generowanych punktów
- Jak umożliwić przegląd całego zbioru dopuszczalnego
- Funkcja celu może dawać “niewłaściwe sygnały” poza zbiorem dopuszczalnym

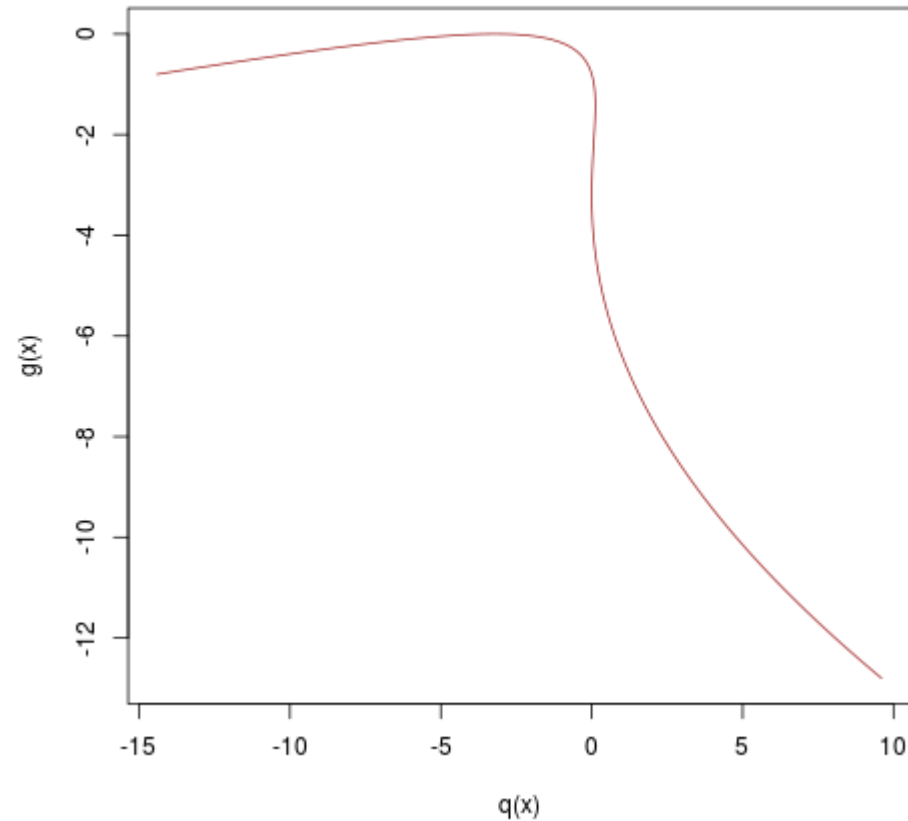
# Wiele kryteriów oceny



$$g(x) = -(x-8)^2/5$$

$$q(x) = -(x-6) \cdot (x-4)^2/10$$

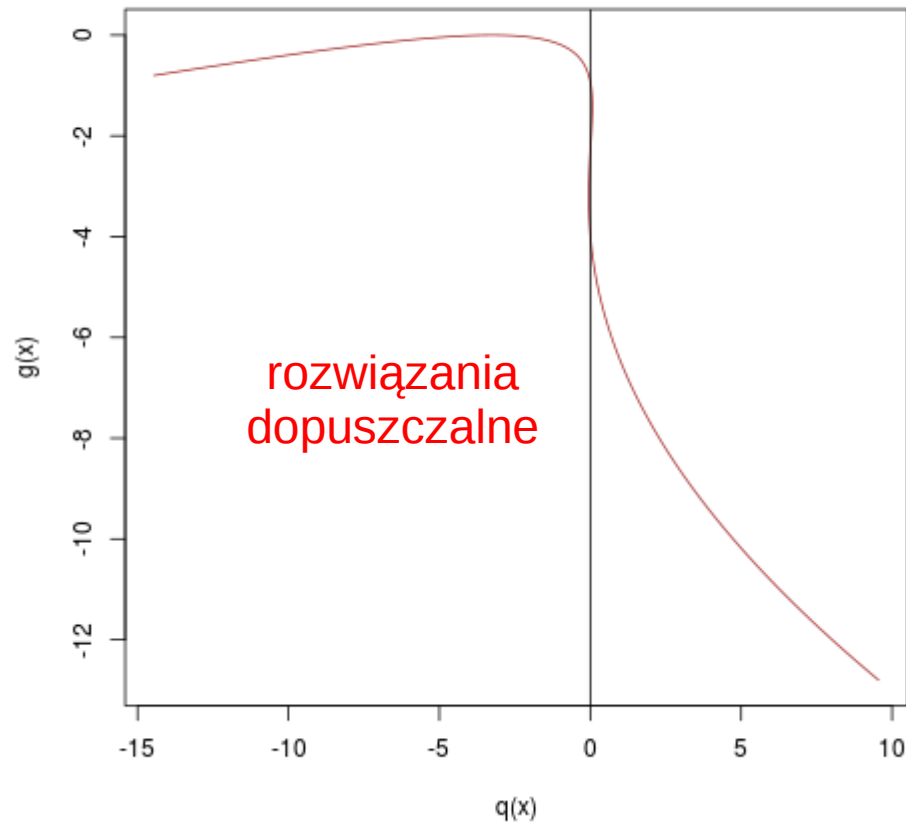
# Wiele kryteriów oceny



$$g(x) = -(x-8)^2/5$$

$$q(x) = -(x-6) \cdot (x-4)^2/10$$

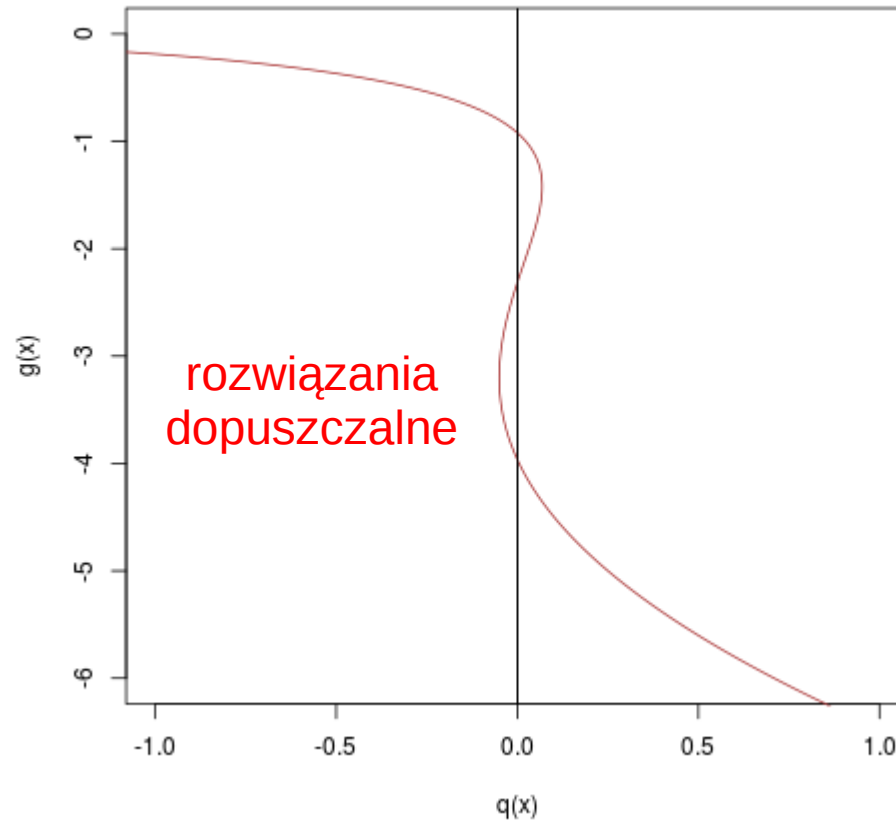
# Wiele kryteriów oceny



$$g(x) = -(x-8)^2/5$$

$$q(x) = -(x-6) \cdot (x-4)^2/10$$

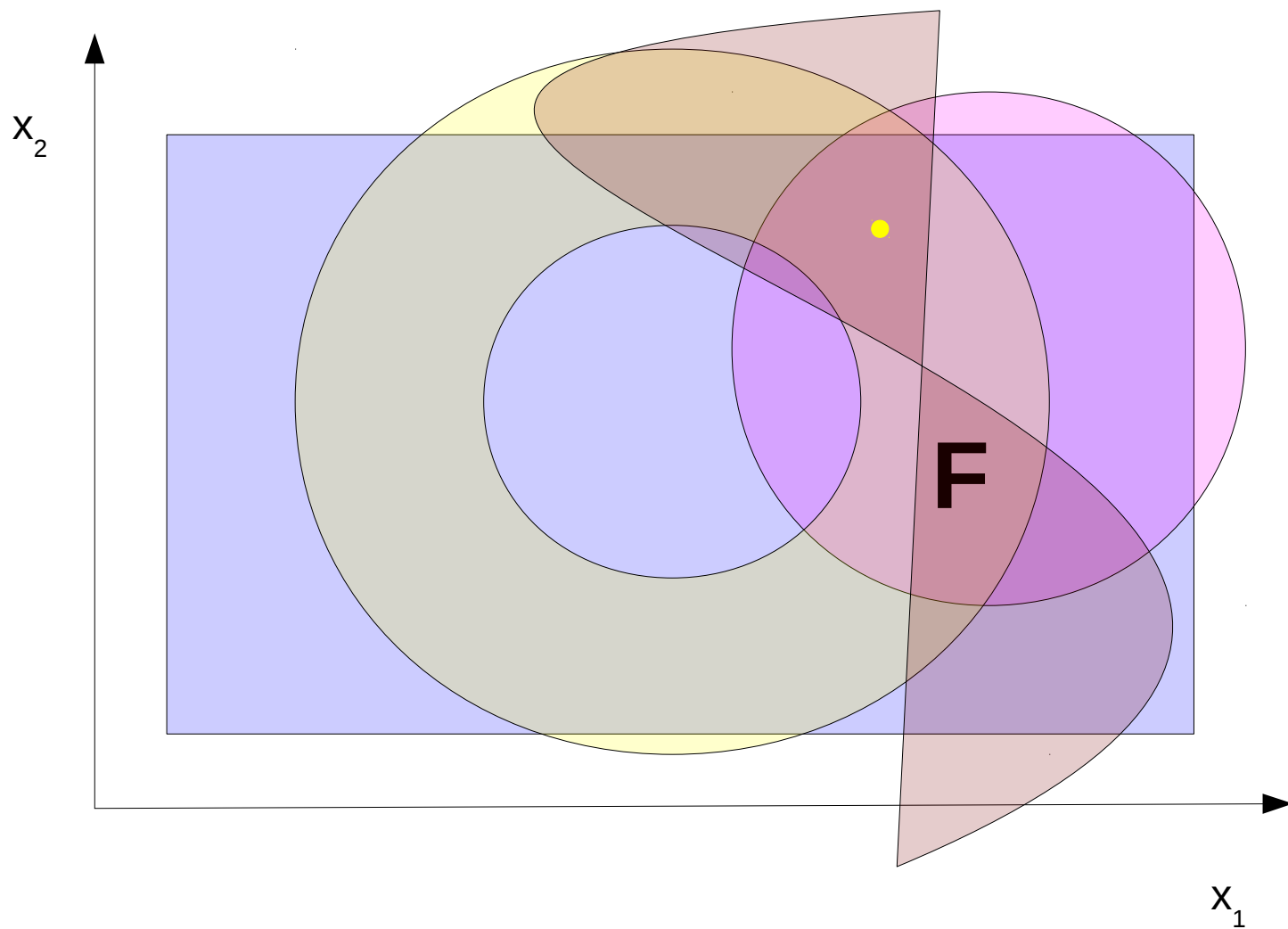
# Wiele kryteriów oceny



$$g(x) = -(x-8)^2/5$$

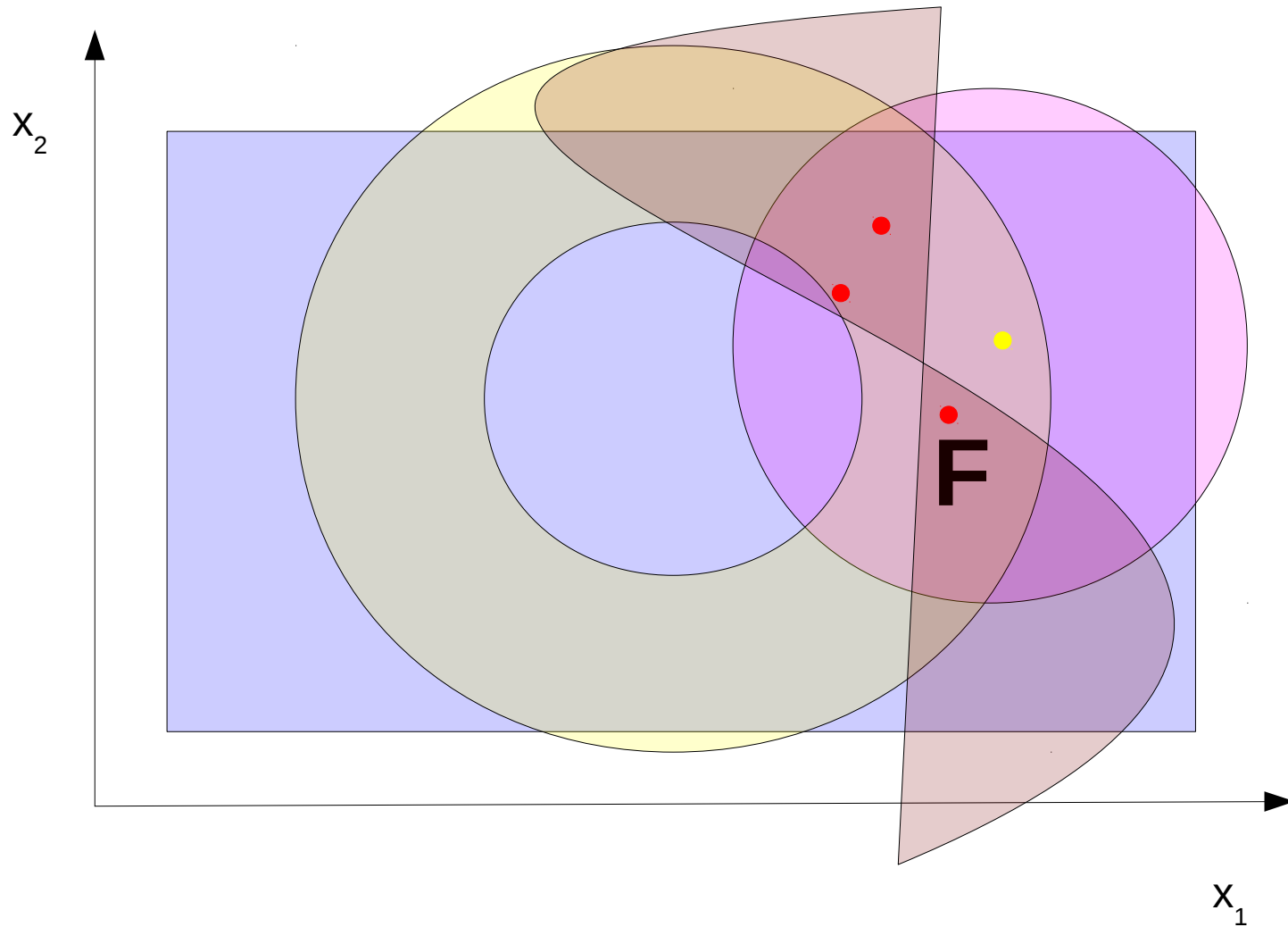
$$q(x) = -(x-6) \cdot (x-4)^2/10$$

# Inicjacja

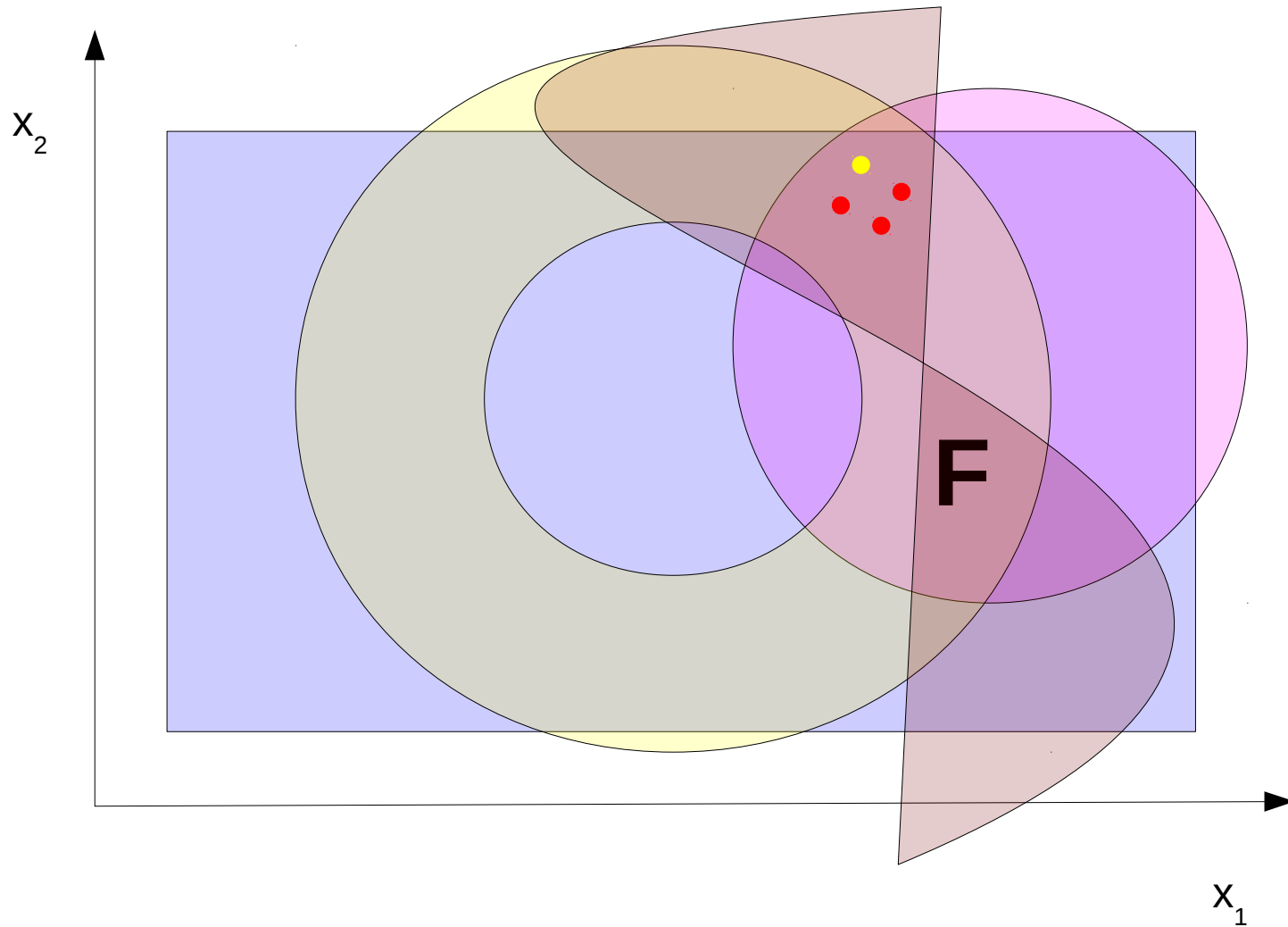




# Dopuszczalność kolejno generowanych punktów



# Przegląd całego zbioru dopuszczalnego



zadanie optymalizacji

$$q: R^n \rightarrow R$$

$x$

$q(x)$

metoda przeszukiwania

Przez różowe okulary



Świat wydaje się być lepszy

zadanie optymalizacji

$$q: F \rightarrow R$$

$$F \subseteq R^n$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad i=1 \dots n$$

$$g_j(\mathbf{x}) \leq 0$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0$$

uwzględnianie ograniczeń

$$q: R^n \rightarrow R$$

$x$

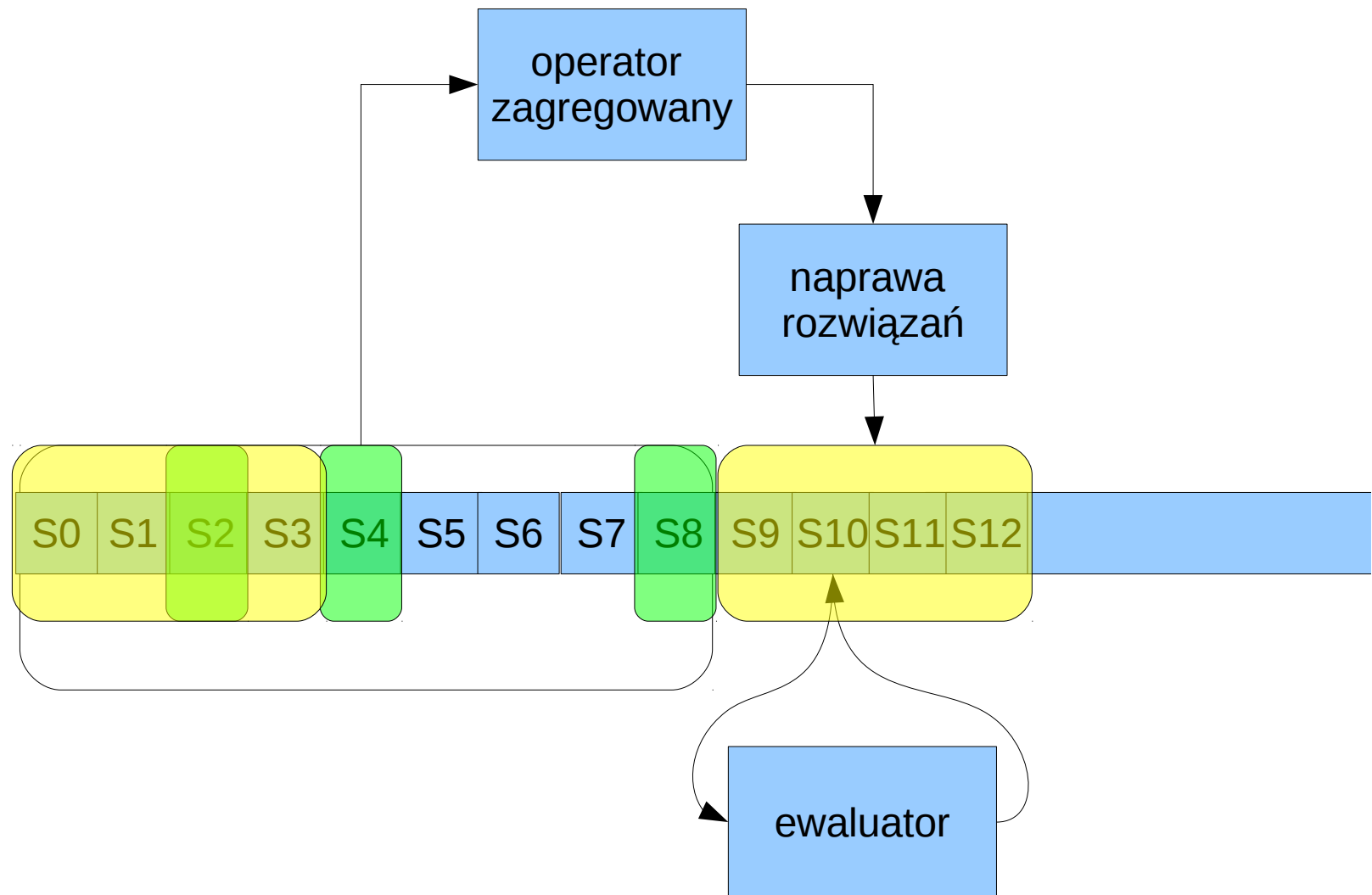
$q(x)$

metoda przeszukiwania

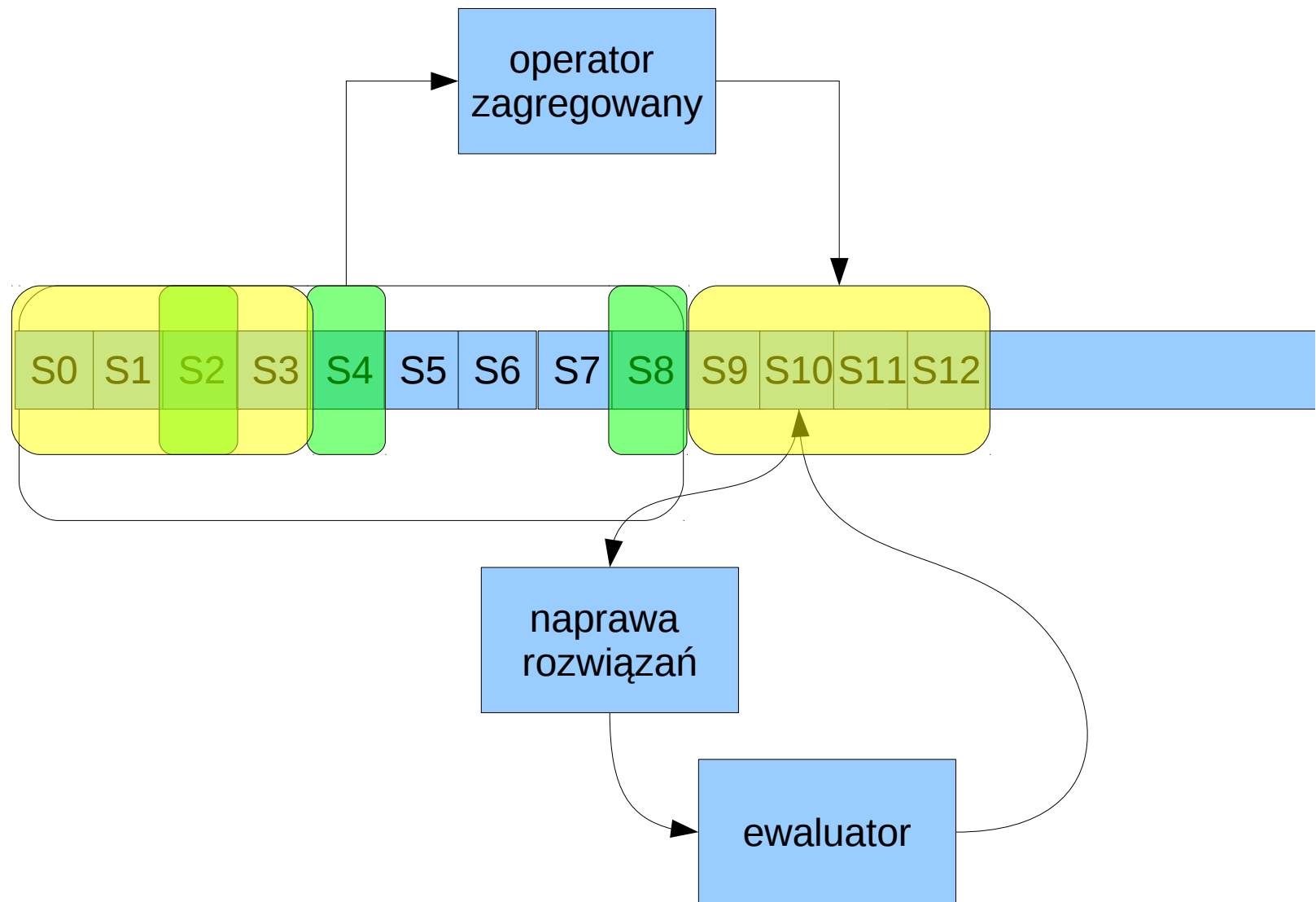
# Sposoby uwzględniania ograniczeń

- Definicja przestrzeni przeszukiwań  
(reprezentacja rozwiązania  
oraz operacje przekształcające) profilaktyka
- Naprawa rozwiązań widoczna  
dla metaheurystyki leczenie przyczynowe
- Naprawa rozwiązań niewidoczna  
dla metaheurystyki leczenie objawowe
- Modyfikacja funkcji celu zmiana definicji choroby

# Naprawa rozwiązań widoczna dla metaheurystyki



# Naprawa rozwiązań niewidoczna dla metaheurystyki

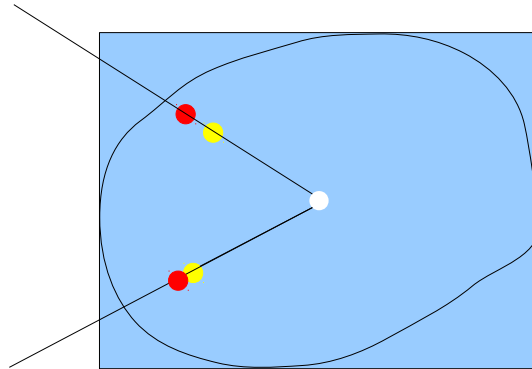


# Reprezentacja rozwiązania i operacje przekształcające - przykład

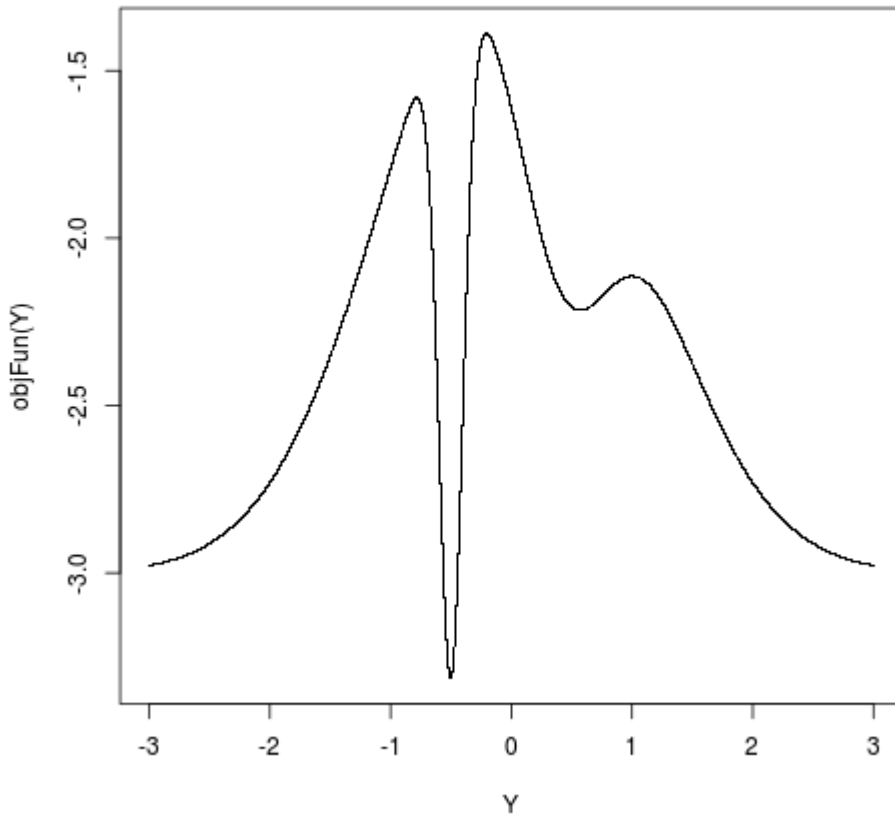
- Poszukiwanie najtańszego cyklu Hamiltona  
reprezentacja rozwiązań (przykłady)
  - Tablica  $n$  etykiet, możliwe powtórzenia
  - Permutacja  $n$  etykiet, bez powtórzeń
    - Etykiety w obu przypadkach mogą być reprezentowane binarnie
  - Zbiór dowolnych krawędzi, bez powtórzeń
  - Zbiór krawędzi połączonych ze sobą
    - Zbiory w obu przypadkach mogą mieć reprezentację binarną



# Naprawa rozwiązań - przykład

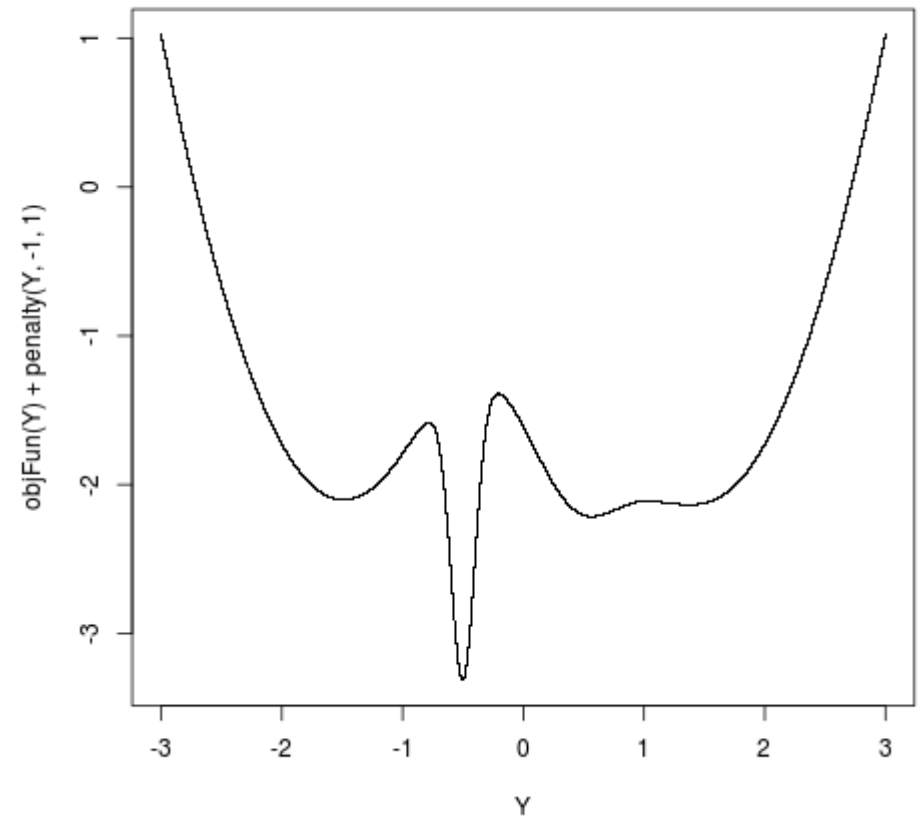


# Modyfikacja funkcji celu zewnątrzna funkcja kary

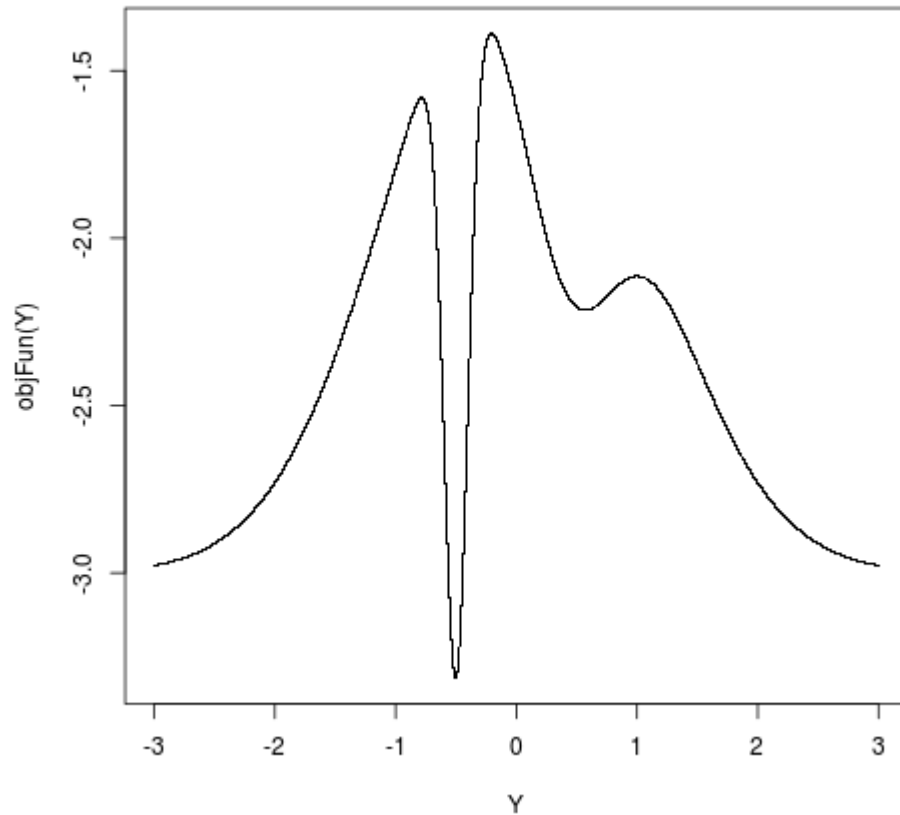


$$p(x) = (g(x))^2$$

$$q'(x) = q(x) + p(x)$$

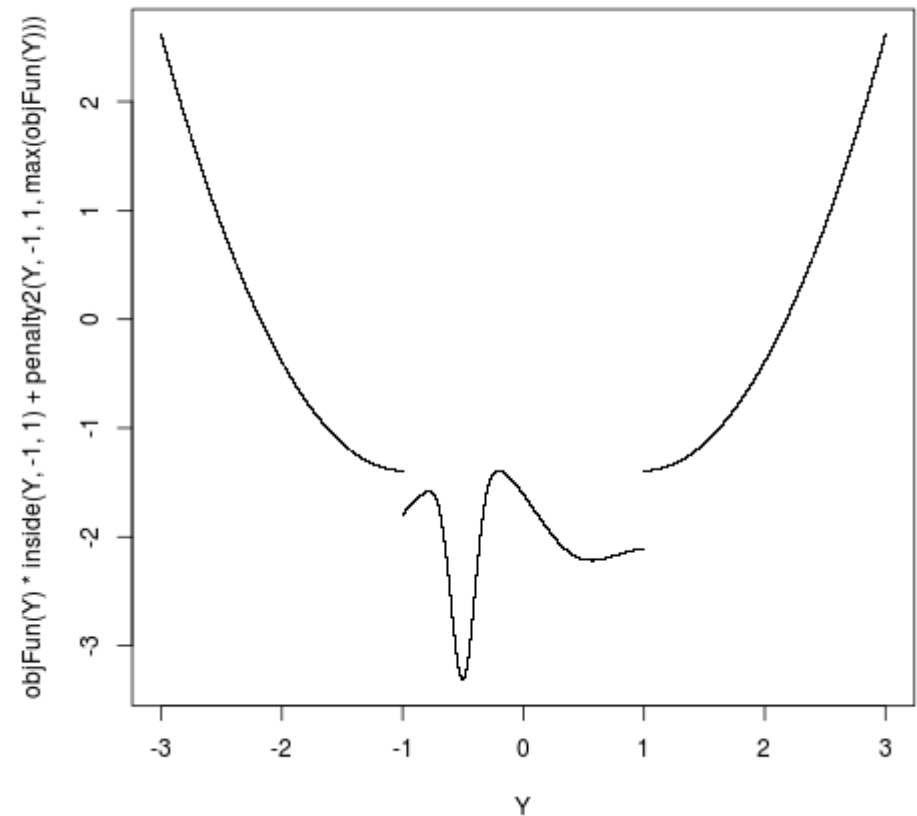


# Modyfikacja funkcji celu zewnątrzna funkcja kary

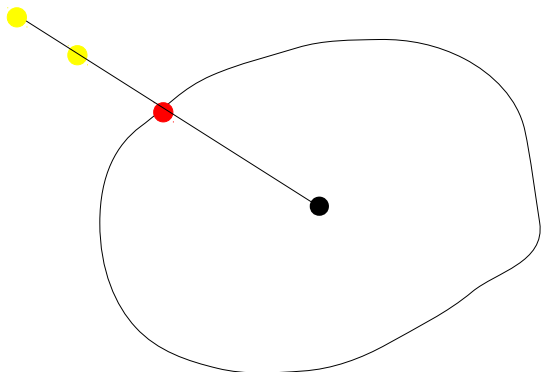


$$p(x) = Q + (g(x))^2$$

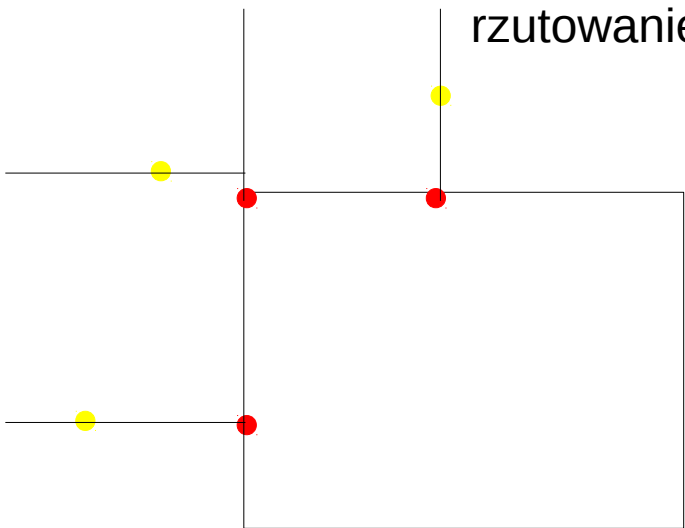
$$q'(x) = p(x)$$



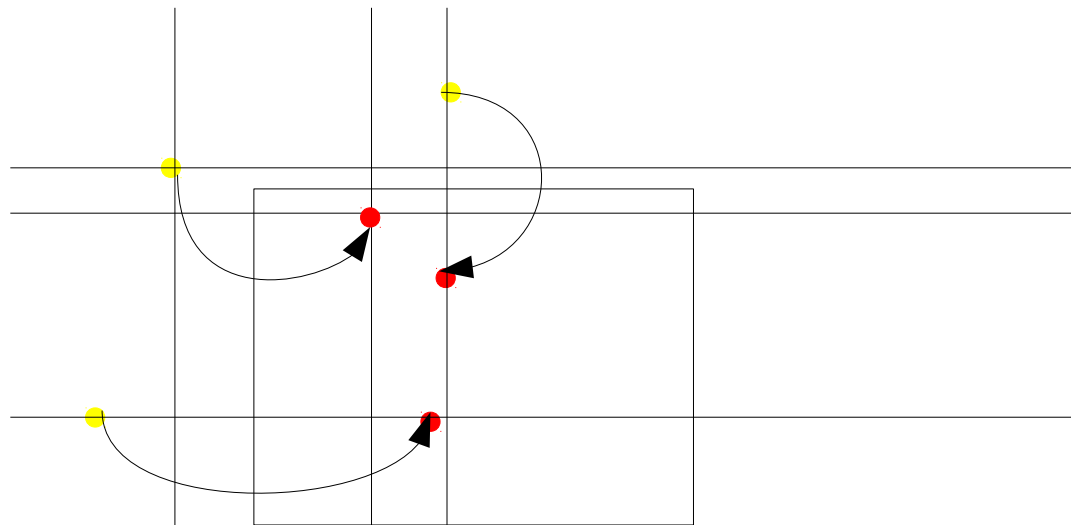
# Naprawa rozwiązań - przykład



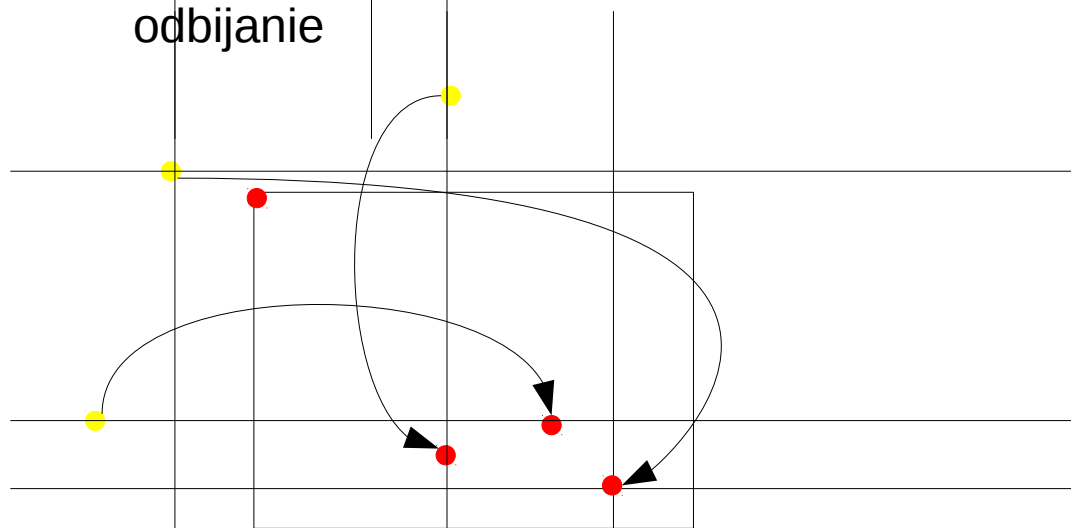
rzutowanie



rzutowanie prostopadłe



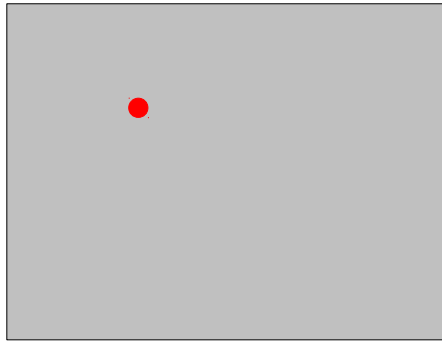
odbijanie



zawijanie

# Naprawa rozwiązań - przykład

•



reinicjacja

$$t: x \rightarrow y \quad y \in F$$
$$q(y)$$

•

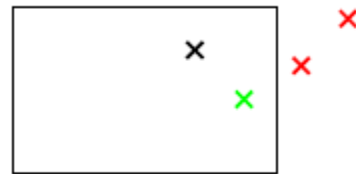


powtórna generacja

# Naprawa rozwiązań

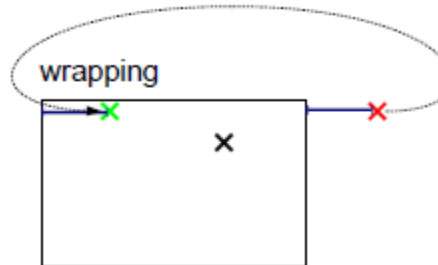
## Possible repairing methods

resampling

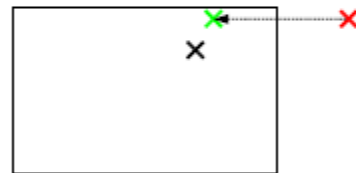


mutation repeats until a feasible point is obtained

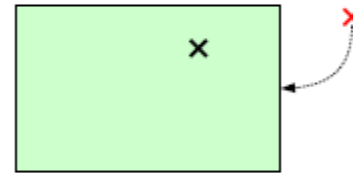
wrapping



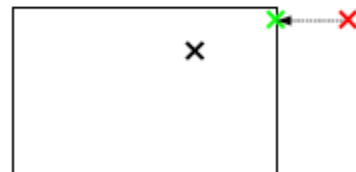
reflection



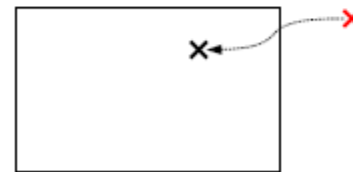
reinitialization






projection



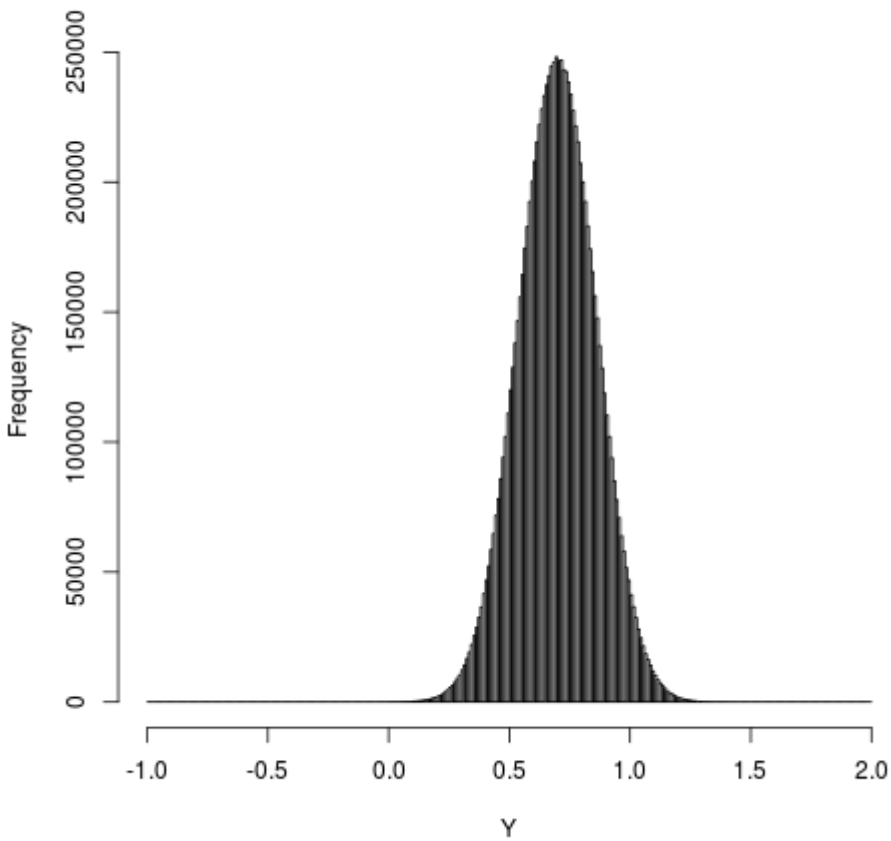
conservative



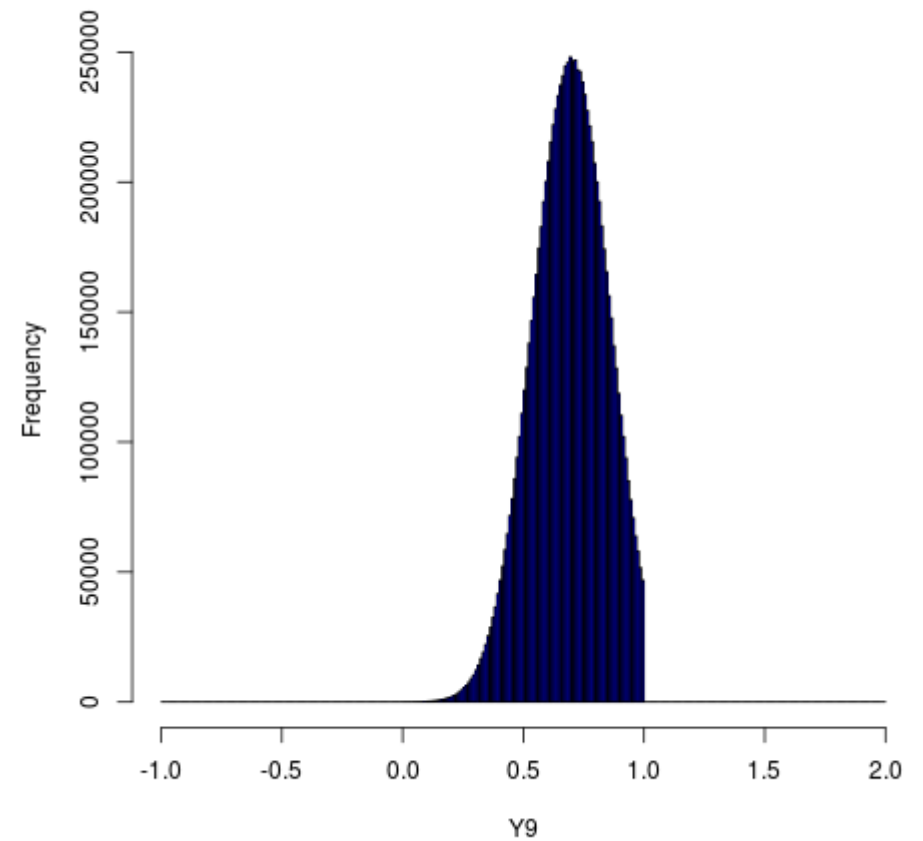
 feasible area     before mutation     after mutation     after repairing

# Naprawa rozwiązań

histogram of mutants - no constraints

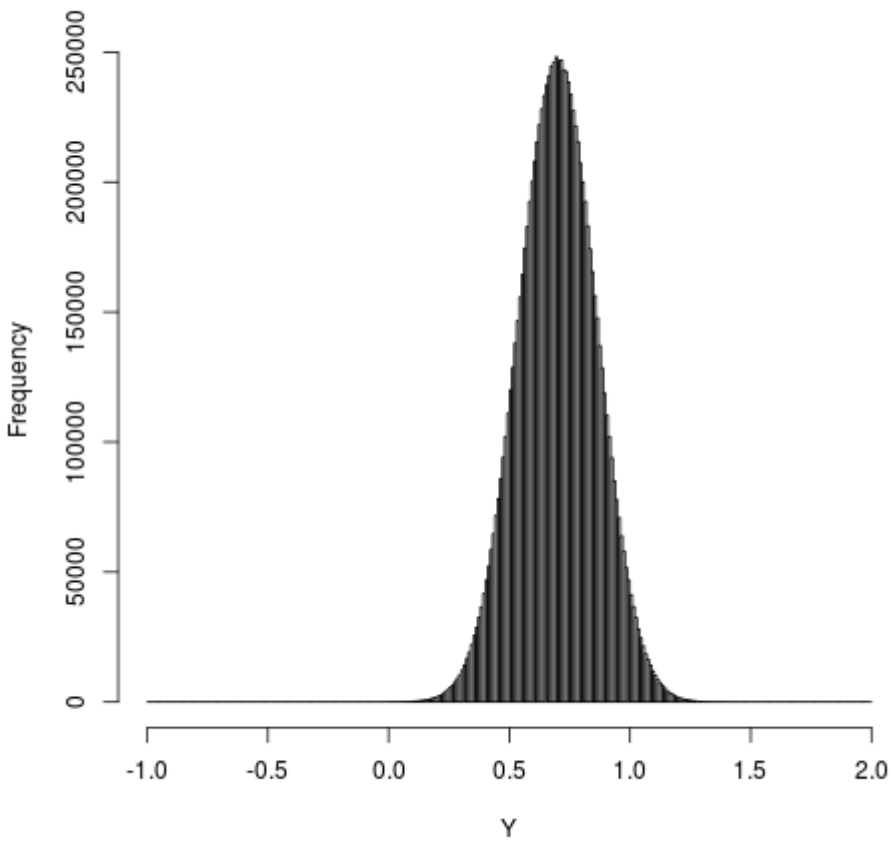


histogram of mutants - resampling

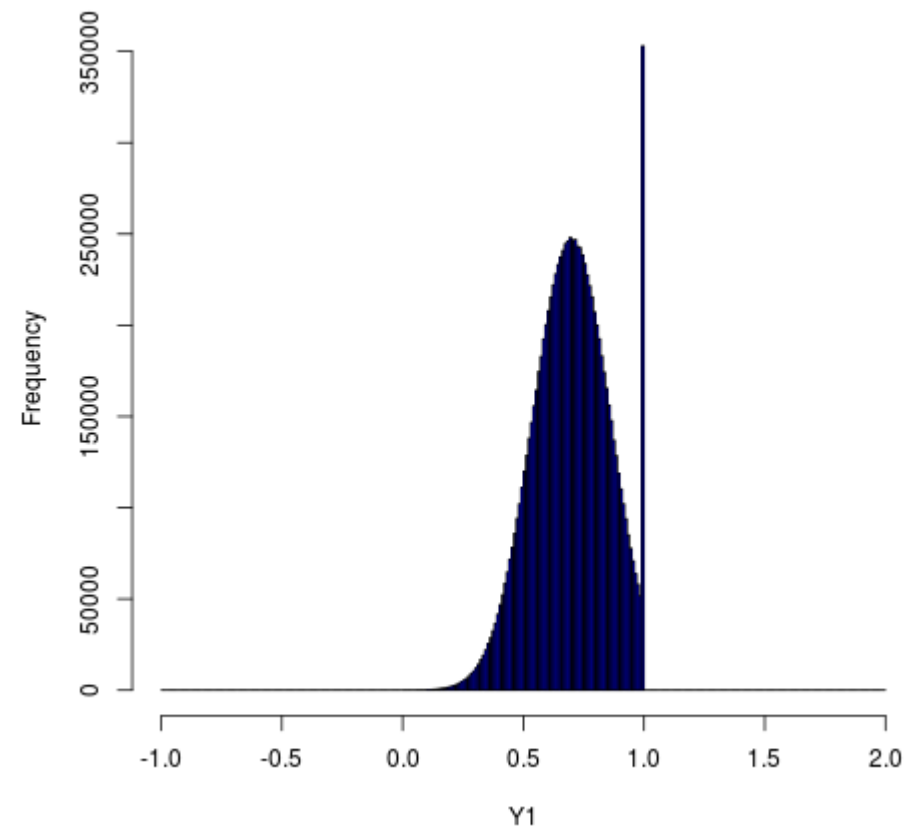


# Naprawa rozwiązań

histogram of mutants - no constraints



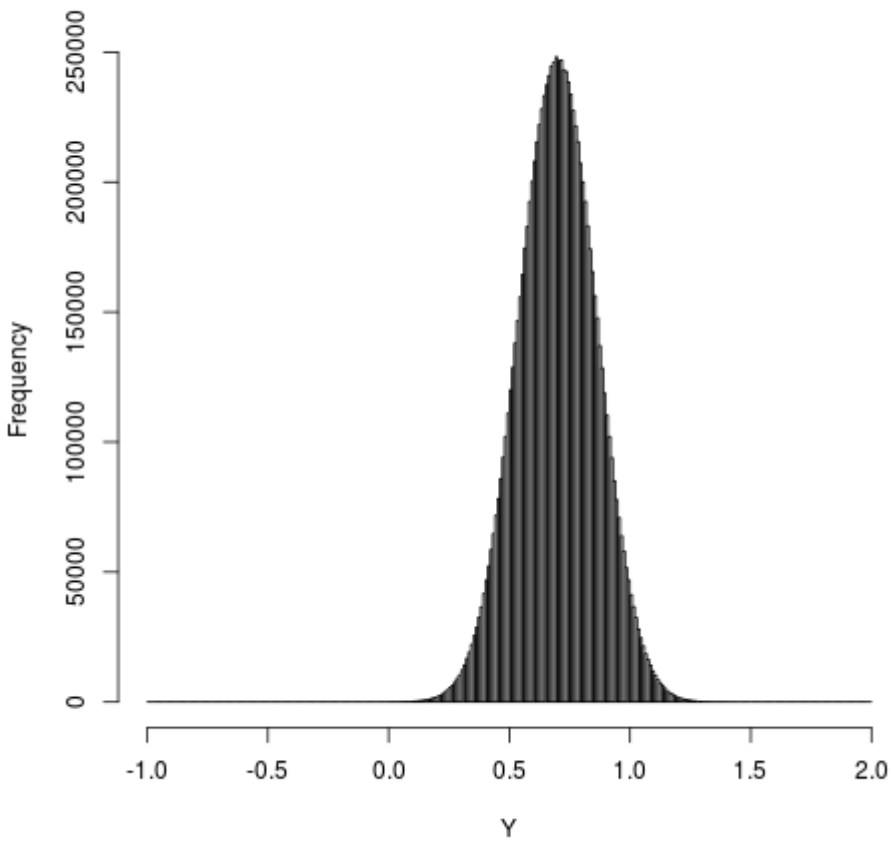
histogram of mutants - projection



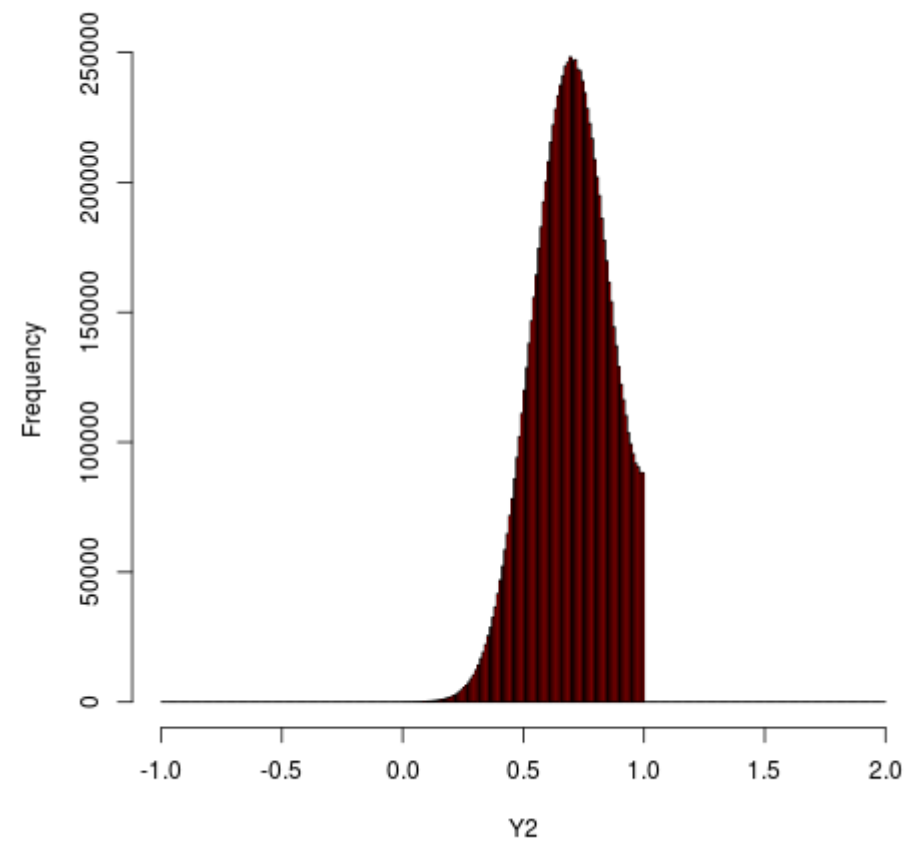


# Naprawa rozwiązań

histogram of mutants - no constraints

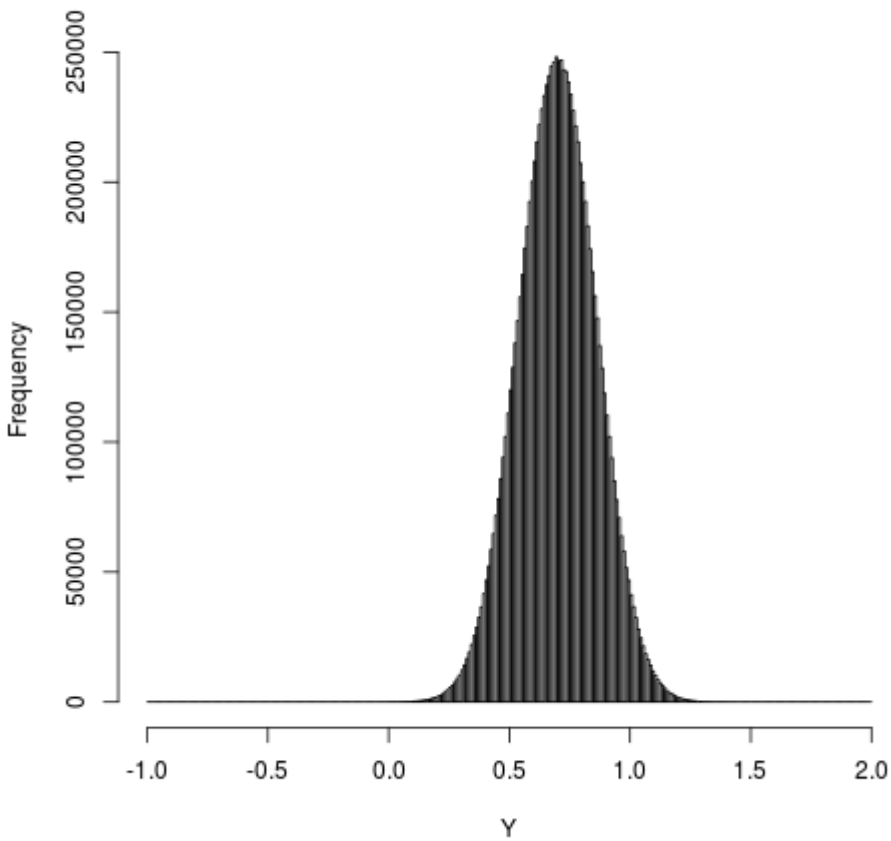


histogram of mutants - reflection

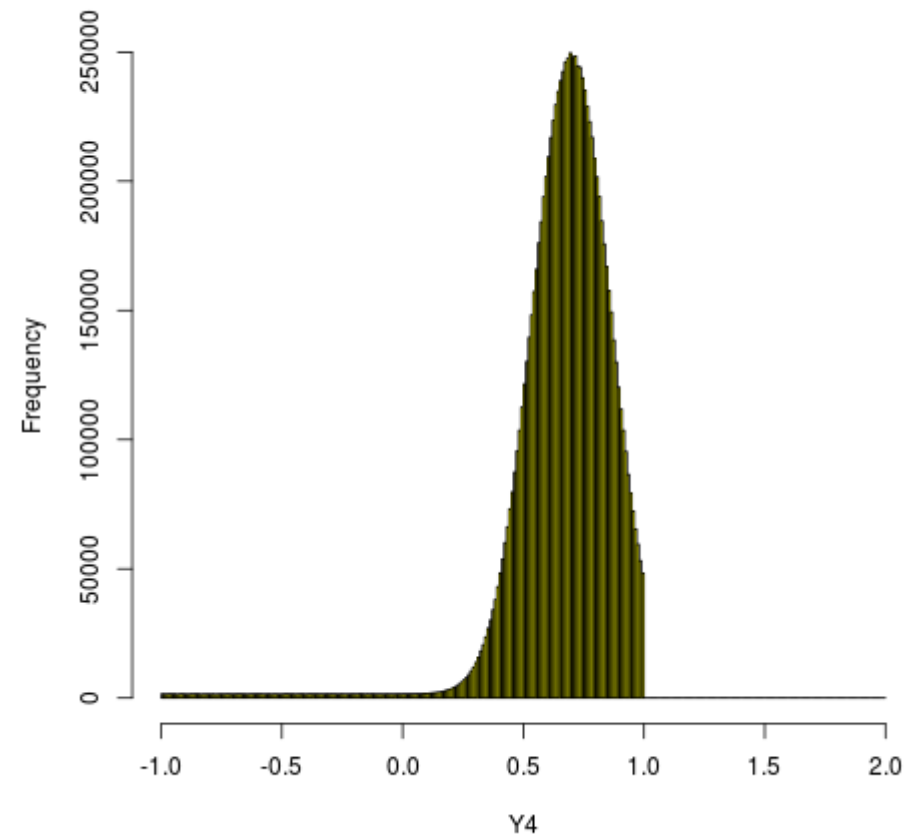


# Naprawa rozwiązań

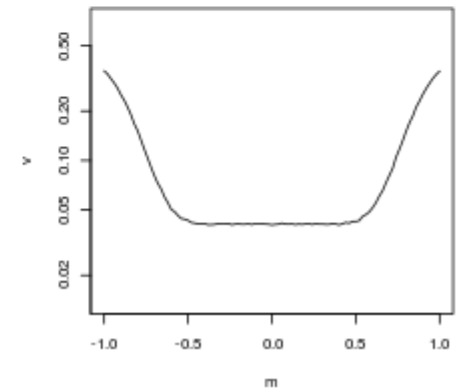
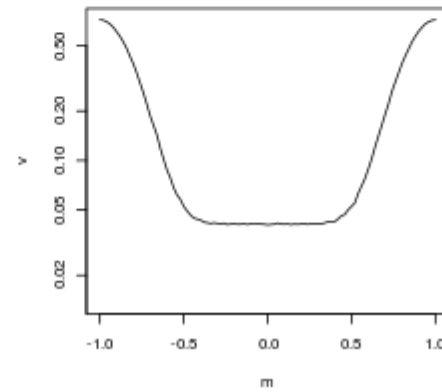
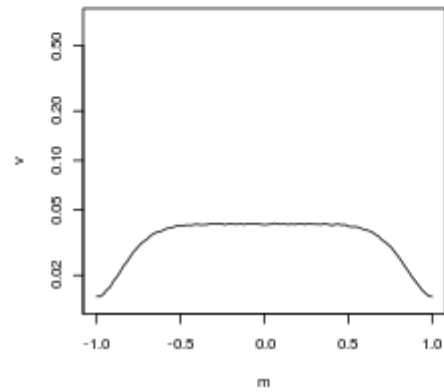
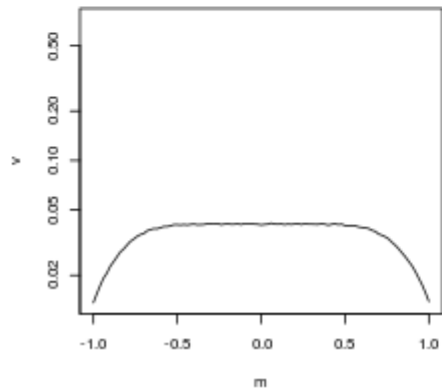
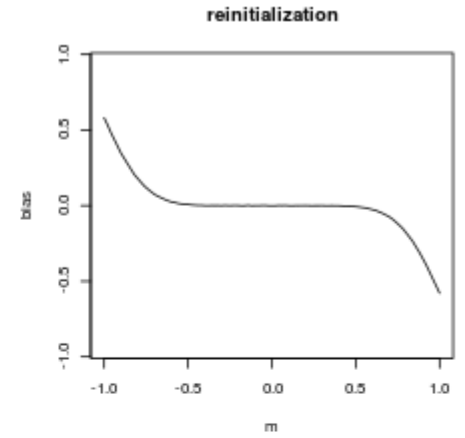
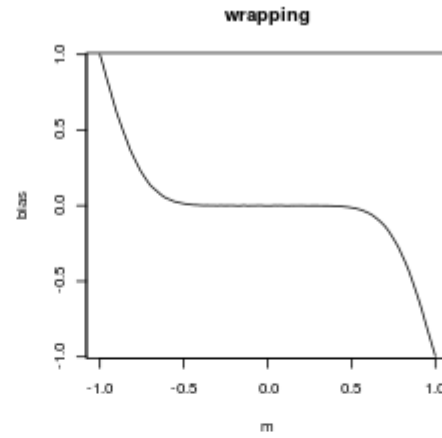
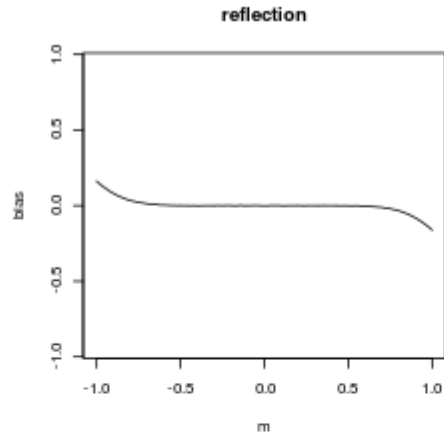
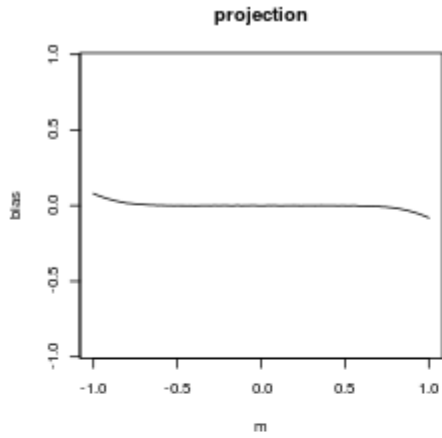
histogram of mutants - no constraints



histogram of mutants - reinitialization

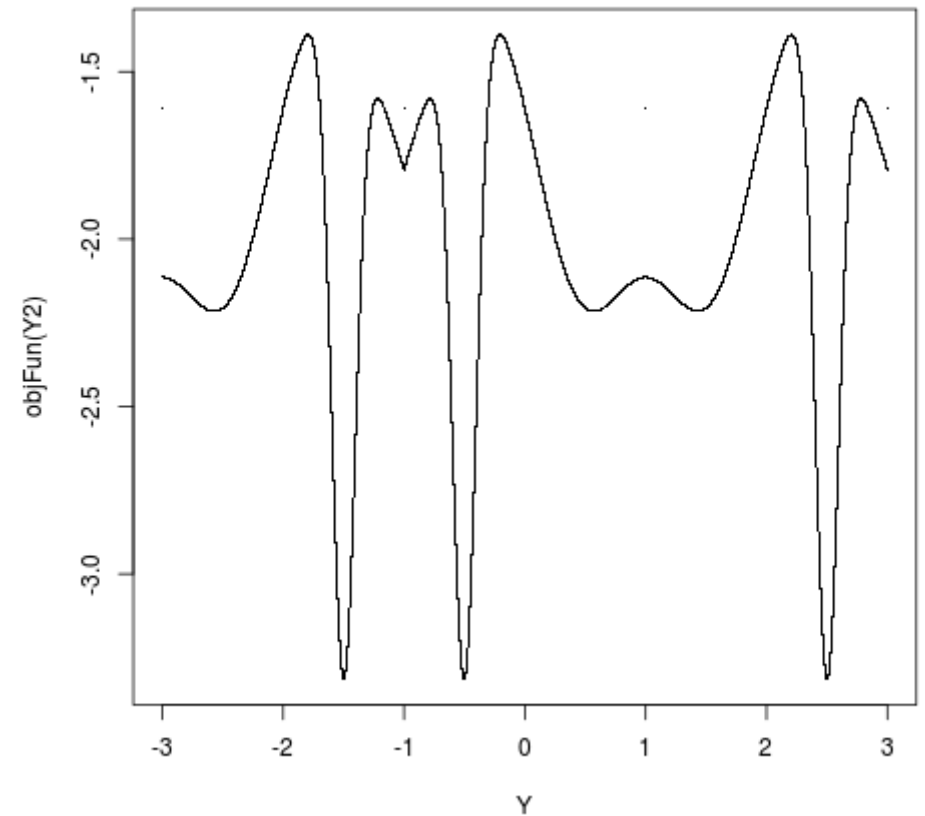
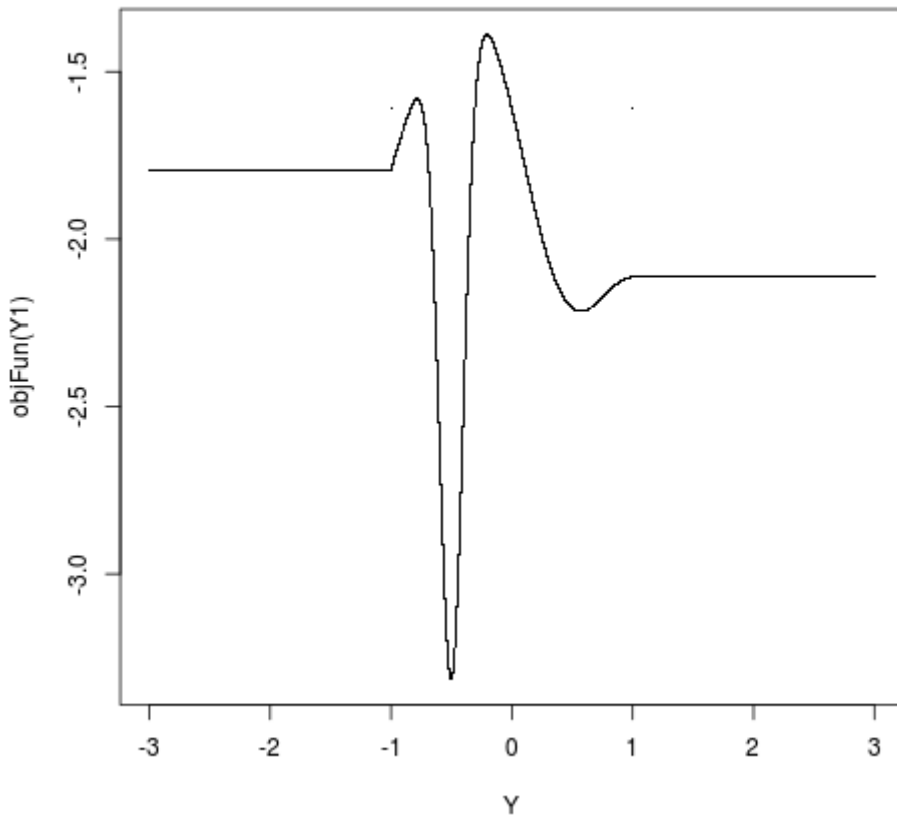


# Naprawa rozwiązań - obciążenia

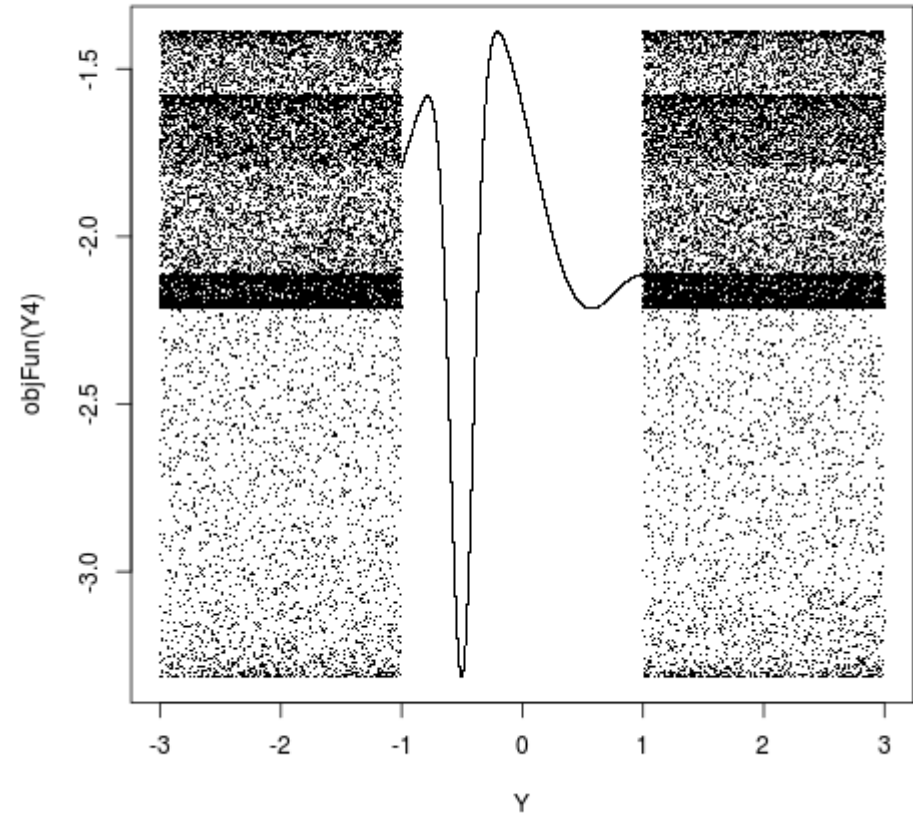
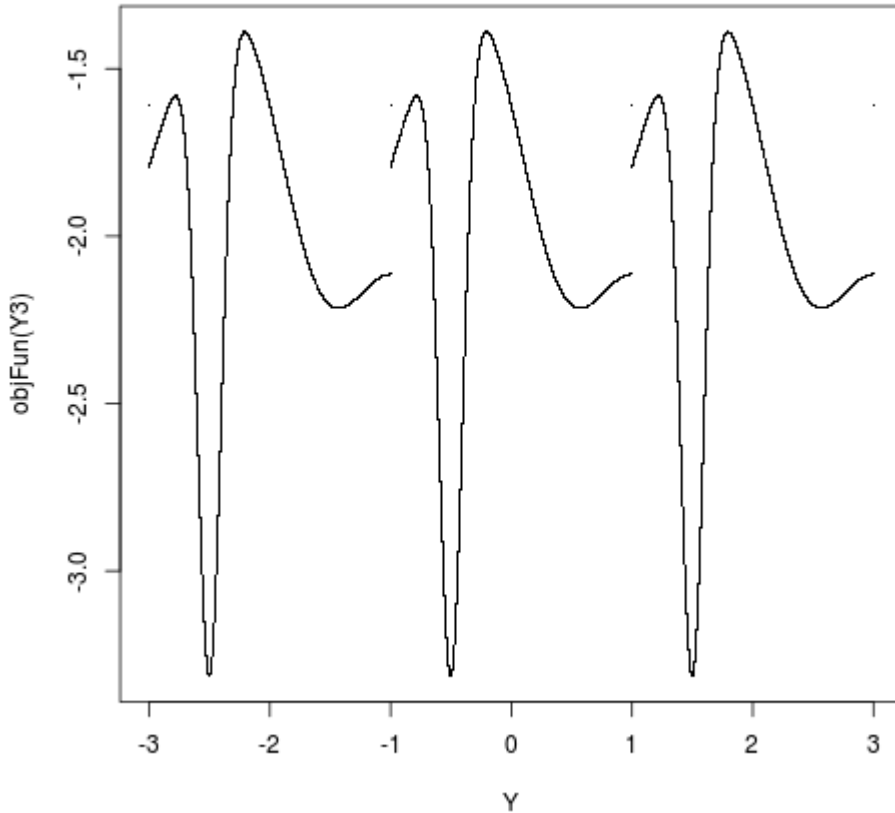


# Modyfikacja funkcji celu a naprawa rozwiązań niewidoczna dla metaheurystyki

$$q(x) = q(t(x))$$



# Modyfikacja funkcji celu a naprawa rozwiązań niewidoczna dla metaheurystyki



# Jak uwzględnianie ograniczeń wpływa na wyniki

**algorithm** DE/rand/1/bin with constraints

$P^0 \leftarrow (\mathbf{l}, \mathbf{u})$

**repeat until** stop condition met

**for**  $i$  **in**  $1..\mu$

$x \leftarrow$  select randomly from  $P^t$

*mutation:*

$y, z \leftarrow$  select randomly from  $P^t$

$v \leftarrow x + F \cdot (y - z)$

**if**  $v$  is feasible **then**  $w \leftarrow v$

**else**  $w \leftarrow$  repair ( $v, x, P^t$ )

$y \leftarrow$  binary crossover ( $P_i^t, w$ )

$P_i^{t+1} \leftarrow$  select best from ( $P_i^t, y$ )

**end for**

$t \leftarrow t + 1$

**end repeat**

**Experimental Comparison of Methods to Handle  
Boundary Constraints in Differential Evolution**

Jarosław Arabas, Adam Szczepankiewicz, Tomasz Wroniak  
Warsaw University of Technology, Poland

*Parallel Problem Solving from Nature, 2010*

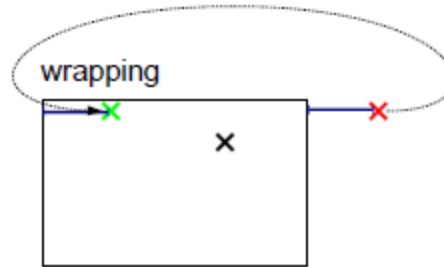
# Jak uwzględnianie ograniczeń wpływa na wyniki

## Possible repairing methods

resampling



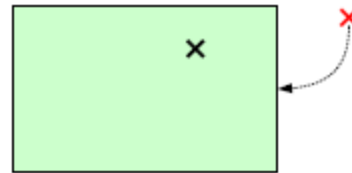
*mutation repeats until  
a feasible point is obtained*



reflection



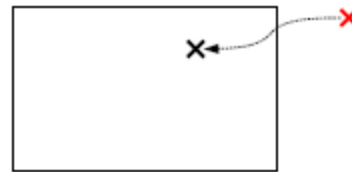
reinitialization




projection



conservative



 feasible area     before mutation     after mutation     after repairing

		resampling	reflection	projection	wrapping	reinitialize	conservative	% repaired
f1 sphere	mean	<b>1.53E+001</b>	6.30E+001	6.82E+001	3.00E+002	3.63E+002	7.07E+002	50
	std	7.12E+000	2.06E+001	2.61E+001	9.75E+001	1.01E+002	1.98E+002	
f2 Schwefel 1.2	mean	<b>1.57E+001</b>	2.06E+002	1.61E+002	5.49E+002	6.37E+002	1.23E+003	60.7
	std	6.65E+000	5.59E+001	7.11E+001	1.70E+002	2.29E+002	6.20E+002	
f3 high conditioned elliptic	mean	<b>5.97E+003</b>	6.04E+005	4.96E+005	1.48E+006	1.53E+006	3.93E+006	76.8
	std	2.68E+003	1.78E+005	1.93E+005	4.96E+005	4.44E+005	1.75E+006	
f4 Schwefel 1.2+noise	mean	<b>7.61E+001</b>	7.09E+002	5.57E+002	1.65E+003	1.97E+003	4.18E+003	67.3
	std	3.98E+001	2.33E+002	1.93E+002	5.30E+002	5.87E+002	2.54E+003	
f5 Schwefel 1.2, opt. on bounds	mean	<b>9.09E+002</b>	4.43E+003	3.93E+003	8.13E+003	9.80E+003	1.17E+004	88.1
	std	4.99E+002	5.49E+002	8.23E+002	9.92E+002	1.37E+003	1.50E+003	
f6 Rosenbrock	mean	<b>1.16E+004</b>	3.97E+004	5.14E+004	7.66E+005	1.67E+006	3.90E+006	51.4
	std	9.02E+003	2.41E+004	3.26E+004	5.11E+005	1.11E+006	2.38E+006	
f8 Ackley	mean	2.11E+001	2.10E+001	2.10E+001	<b>2.09E+001</b>	2.10E+001	2.11E+001	46.3
	std	2.26E-001	4.26E-002	5.22E-002	1.08E-001	5.22E-002	2.18E-001	
f9 Rastrigin	mean	<b>8.97E+001</b>	1.30E+002	1.16E+002	1.59E+002	1.68E+002	1.84E+002	67.3
	std	1.14E+001	4.19E+001	3.36E+001	2.91E+001	3.35E+001	2.94E+001	
f10 Rastrigin rotated	mean	<b>9.91E+001</b>	1.48E+002	1.41E+002	1.98E+002	2.17E+002	2.41E+002	70.5
	std	4.24E+001	3.52E+001	2.58E+001	3.02E+001	1.76E+001	1.60E+001	
f11 Weierstrass rotated	mean	<b>2.20E+001</b>	3.74E+001	3.98E+001	3.87E+001	3.72E+001	2.56E+001	54.2
	std	5.89E+000	5.29E+000	2.73E+000	3.72E+000	5.59E+000	2.50E+000	
f12 Schwefel 2.13	mean	<b>1.02E+004</b>	4.79E+004	1.00E+005	8.85E+004	6.34E+004	7.65E+004	65.7
	std	6.64E+003	2.12E+004	4.45E+004	2.96E+004	2.58E+004	3.00E+004	
f13 Griewank+Rosenbrock	mean	<b>1.57E+001</b>	1.82E+001	1.85E+001	1.77E+001	1.80E+001	1.92E+001	30
	std	1.94E+000	1.31E+000	1.07E+000	1.41E+000	1.61E+000	1.44E+000	
f14 expanded Shaffer	mean	<b>1.31E+001</b>	1.34E+001	1.35E+001	1.36E+001	1.36E+001	<b>1.31E+001</b>	55.9
	std	9.91E-001	4.19E-001	2.46E-001	2.37E-001	2.07E-001	6.40E-001	
f15 composition #1	mean	<b>4.30E+002</b>	4.50E+002	4.48E+002	4.87E+002	4.84E+002	5.11E+002	60.9
	std	3.56E+001	2.06E+001	2.59E+001	1.94E+001	4.42E+000	3.22E+001	
f16 rotated composition #1	mean	<b>1.36E+002</b>	1.70E+002	1.65E+002	2.46E+002	2.60E+002	3.01E+002	76.3
	std	2.83E+001	3.76E+001	3.13E+001	1.95E+001	1.99E+001	4.05E+001	
f17 f16 with noise	mean	<b>1.89E+002</b>	2.56E+002	2.47E+002	2.97E+002	2.99E+002	3.36E+002	85.8
	std	5.95E+001	2.59E+001	1.87E+001	2.10E+001	1.92E+001	5.34E+001	
f18 composition #2	mean	<b>8.61E+002</b>	9.33E+002	9.22E+002	9.62E+002	9.68E+002	9.93E+002	90.6
	std	5.34E+001	3.76E+000	4.52E+000	1.70E+001	2.75E+001	2.80E+001	
f19	mean	<b>8.44E+002</b>	9.33E+002	9.22E+002	9.49E+002	9.63E+002	9.95E+002	89.9



# Jak uwzględnianie ograniczeń wpływa na wyniki

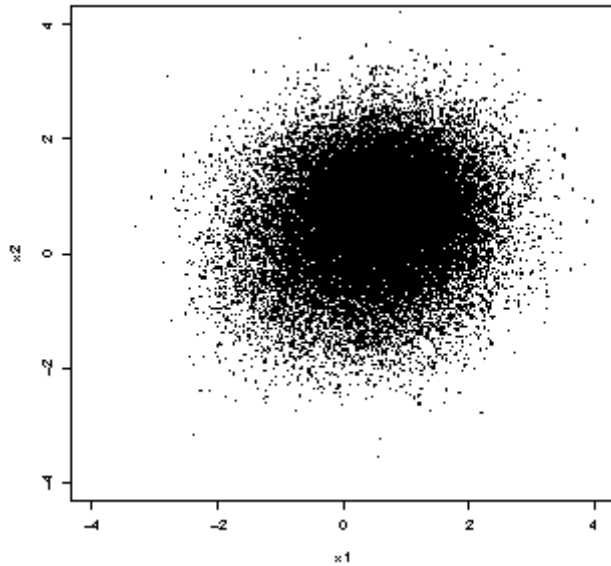
algorithm	Function number																							
	1	2	3	4	5	6	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
"standard" DE/rand/1/bin	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	.	-	.	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	
DE/rand/1/bin, higher selection pressure	-	+	+	+	+	-	.	-	-	.	-	-	.	-	+	-	.	.	+	+	-	+	-	
Steady-state, (multi)parent centric x-over, sex.diff.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	.	.	-	-	-	-	-	+	+	+	-	-	+	-	
Steady-state, local search, lamarkian evolution	-	-	+	-	+	-	-	-	.	+	-	-	-	-	+	+	.	+	+	-	-	+	-	
Steady-state, parent centric x-over	-	-	+	-	+	-	-	-	-	-	.	-	.	-	-	-	+	+	+	-	-	.	-	
Steady-state, paret centric x-over, subpopulations	-	-	-	+	+	-	-	-	-	+	-	-	+	+	-	.	-	.	.	+	+	+	-	
Coevol. of Gaussian mut. steps and solutions	-	-	-	+	+	-	-	+	+	+	+	-	.	.	+	+	+	+	+	+	+	+	-	
EDA, unimodal Gaussian distr., trunc sel.	+	+	+	+	+	+	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	.	-	+	-	
Restart CMA-ES, incr.pop.size	-	-	-	.	-	-	-	-	-	-	.	-	.	-	-	+	+	+	+	-	-	.	-	
Restart CMA-ES, incr.step size	-	-	-	+	-	-	-	+	+	-	.	-	+	-	-	+	+	+	+	-	-	.	-	

*Results of a generalized Student's test:*

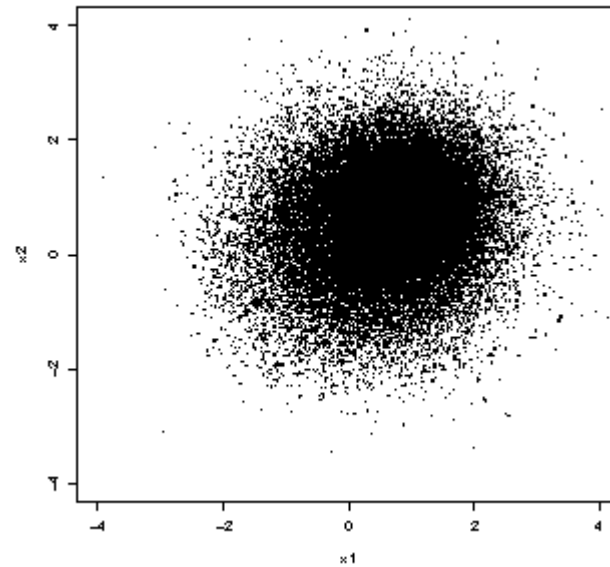
*DE/rand/1/bin with resampling wins ("+") or loses ("-").*

*Symbol "." indicates no statistically significant difference*

# DE/rand/1 i ograniczenia



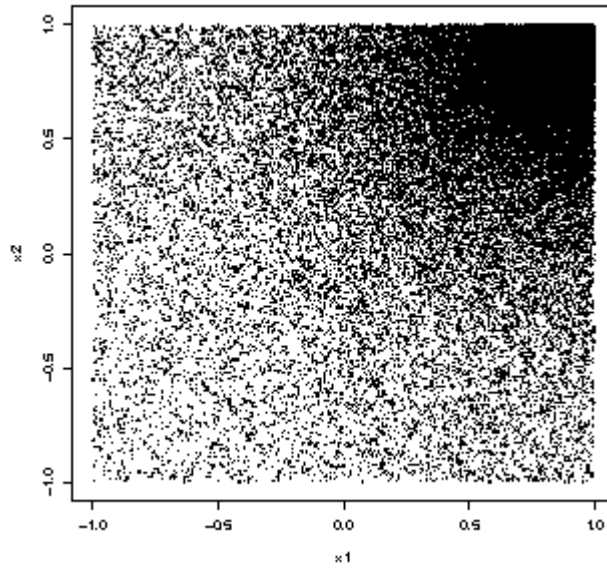
Bez ograniczeń



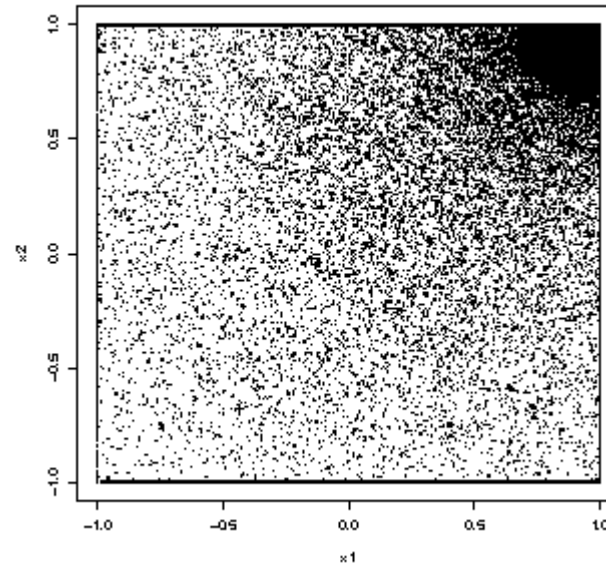
Kwadratowa f. kary

# naprawa widoczna dla DE

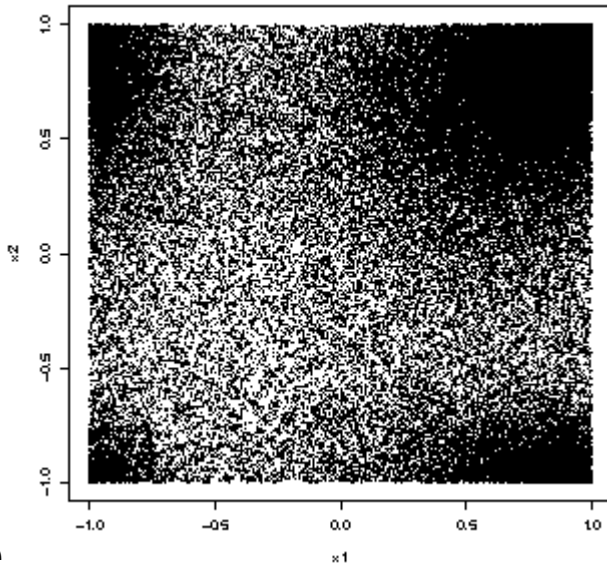
odbijanie



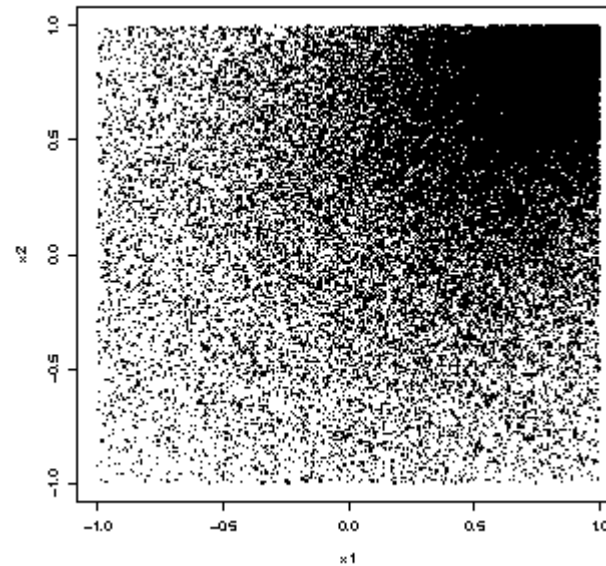
rzutowanie



zawijanie

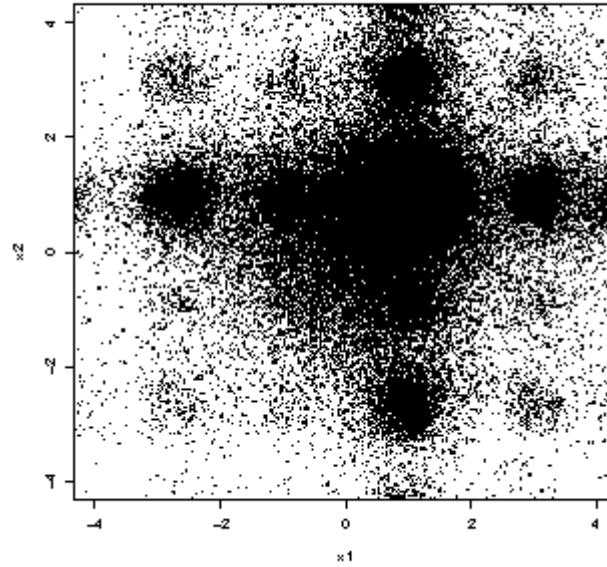


reinicjacja

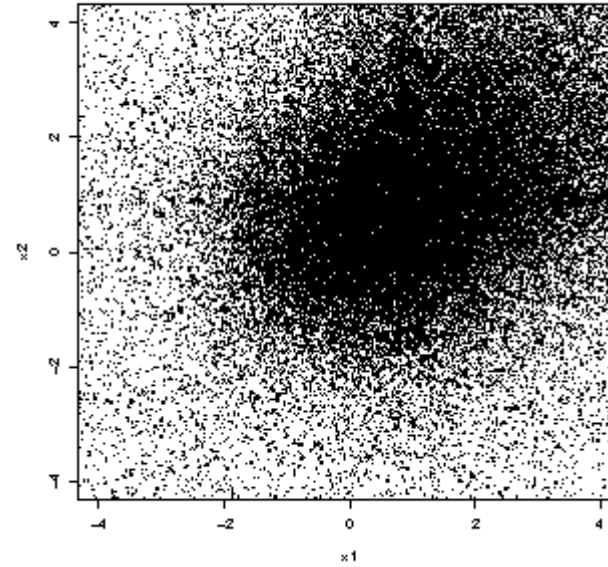


# naprawa niewidoczna dla DE

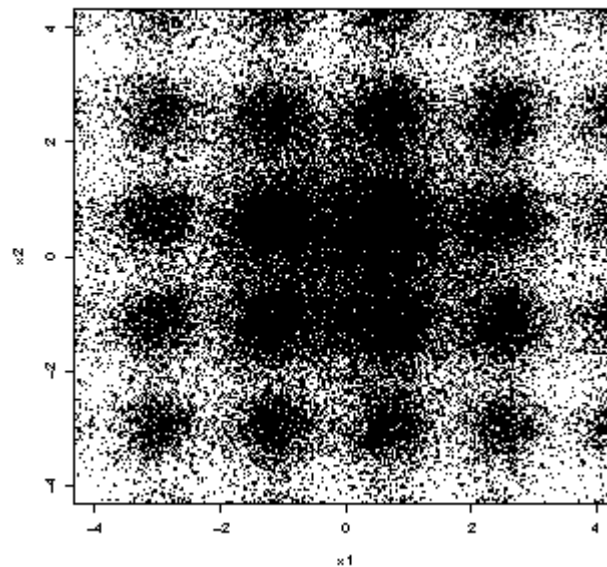
odbijanie



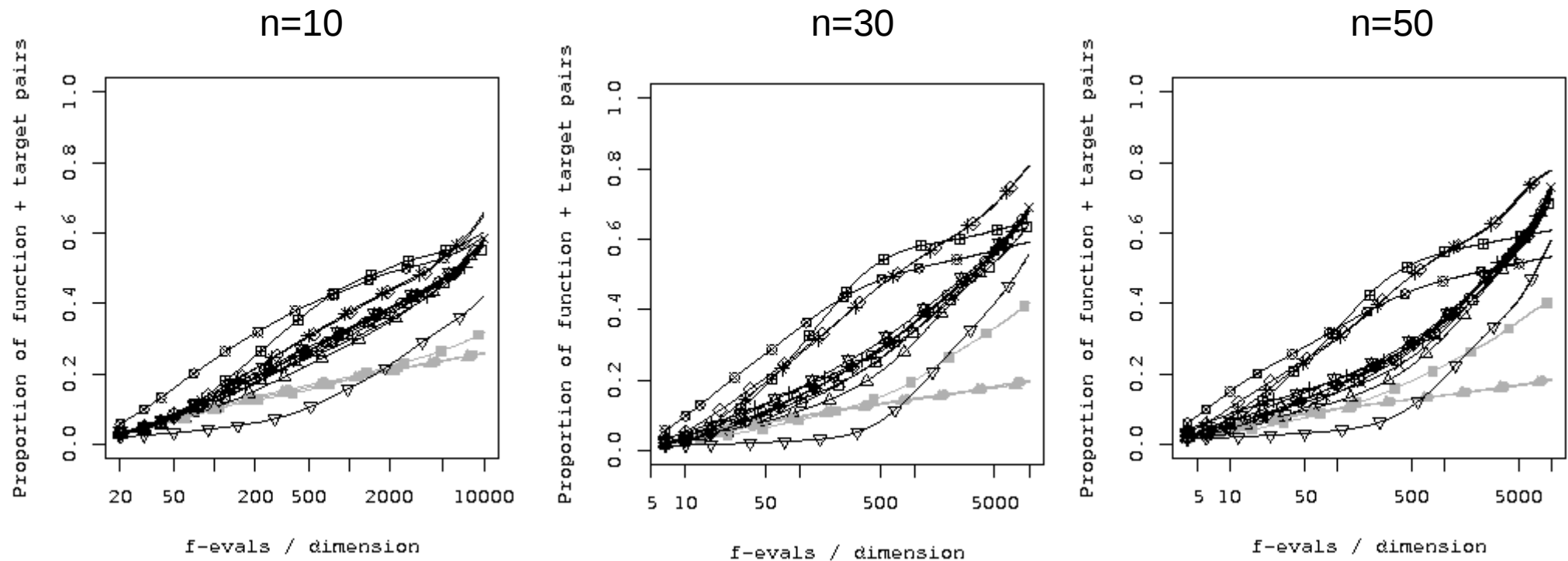
rzutowanie



zawijanie



# DE/rand/1/bin i ograniczenia wyniki dla CEC2017, problemy 1-30



- |                         |                          |                      |
|-------------------------|--------------------------|----------------------|
| × Reinitialization      | ▲ Darwinian wrapping     | ◆ Rand base          |
| ◻ Lamarckian projection | + Projection to midpoint | ● Midpoint base      |
| ■ Darwinian projection  | ◊ Death penalty          | ⊠ Midpoint target    |
| ○ Lamarckian reflection | ▽ Additive penalty       | ▣ Projection to base |
| ● Darwinian reflection  | ■ Substitution penalty   | ■ Conservatism       |
| △ Lamarckian wrapping   | * Resampling             |                      |

# DE/rand/1/bin i ograniczenia wyniki dla CEC2017, miara AUC

method	n=10	n=30	n=50	n=100
Resampling	0.51	0.68	0.67	0.71
Death penalty	0.51	0.67	0.67	0.71
Projection to base	0.53	0.61	0.58	0.54
Midpoint target	0.46	0.54	0.55	0.61
Reflection L.	0.45	0.54	0.54	0.61
Midpoint base	0.45	0.53	0.54	0.61
Rand base	0.45	0.53	0.54	0.6
Reinitialization	0.45	0.53	0.54	0.6
Projection to mid.	0.43	0.53	0.55	0.6
Wrapping L.	0.43	0.52	0.53	0.59
Conservatism	0.52	0.55	0.5	0.48
Projection L.	0.44	0.5	0.52	0.58
Additive pen.	0.3	0.38	0.39	0.43
Projection D.	0.26	0.32	0.33	0.32
Reflection D.	0.23	0.18	0.16	0.16
Wrapping D.	0.23	0.17	0.16	0.16

D. oznacza naprawę niewidoczną dla metody

L. oznacza naprawę widoczną dla metody