

ALHE  
Jarosław Arabas

Taksonomia metaheurystyk

# Definicja zadania przeszukiwania

- Przestrzeń przeszukiwań  $X$
- Metryka  $\delta : X \times X \rightarrow R_+$
- Otoczenie punktu  $N_r(x) = \{y \in X, \delta(x, y) < r\}$
  
- Wygenerować punkty z  $X$  spełniające jakąś pożądaną właściwość (lub wszystkie punkty z  $X$ )

# Definicja zadania optymalizacji

- Funkcja celu  $q: X \rightarrow R$
- Metryka  $\delta: X \times X \rightarrow R_+$
- Otoczenie punktu  $N_r(x) = \{y \in X, \delta(x, y) < r\}$
- Minimum lokalne  $\forall y \in N_r(x) \quad q(x) < q(y)$
- Minimum globalne  $\forall y \in X \quad q(x) < q(y)$
  
- Znaleźć minimum lokalne  
lub minimum globalne

# Definicja zadania przeszukiwania

- Zadanie przeszukiwania  $\langle X, q, S, T_z \rangle \in \Pi$

przestrzeń przeszukiwań  $X$

f.celu  $q: X \rightarrow R$

zbiór punktów początkowych  $S \subseteq X$

zewnętrzne kryterium  
zatrzymania  $T_z: X^* \times U^* \rightarrow \{0,1\}$

log - odwiedzone punkty  $H \in X^*$

# Definicja metody przeszukiwania

*algorytm metaheuristic search*( $q, S, T_z, u$ )

$H \leftarrow I(S, u)$

*evaluate*( $q, P$ )

$m^1 \leftarrow I_m(S, u)$

$t \leftarrow 1$

**while** ( $\neg T_z(H, u) \wedge \neg T_w(H, m^t, u)$ )

$X^t \leftarrow o_s(P, H, m^t, u)$

$Y^t \leftarrow o_v(X^t, m^t, u)$

*evaluate*( $Y^t, P$ )

$H \leftarrow H \cup Y^t$

$m^{t+1} \leftarrow o_m(P, m^t, Y^t, u)$

$t \leftarrow t+1$

# Definicja metody przeszukiwania

- Metoda przeszukiwania  $\langle X, I, O \rangle$

operator zagregowany  $O: \Pi \times X^* \times U^* \rightarrow X^*$

operator inicjacji  $I: S \times U^* \rightarrow X^*$

przestrzeń sekwencji losowych  $U^*$

przestrzeń stanów  $M$

Stan zwany również modelem

# Definicja operatora zagregowanego

- Operator zagregowany  $O: \Pi \times X^* \times U^* \rightarrow X^*$   
ma wewnętrzną strukturę

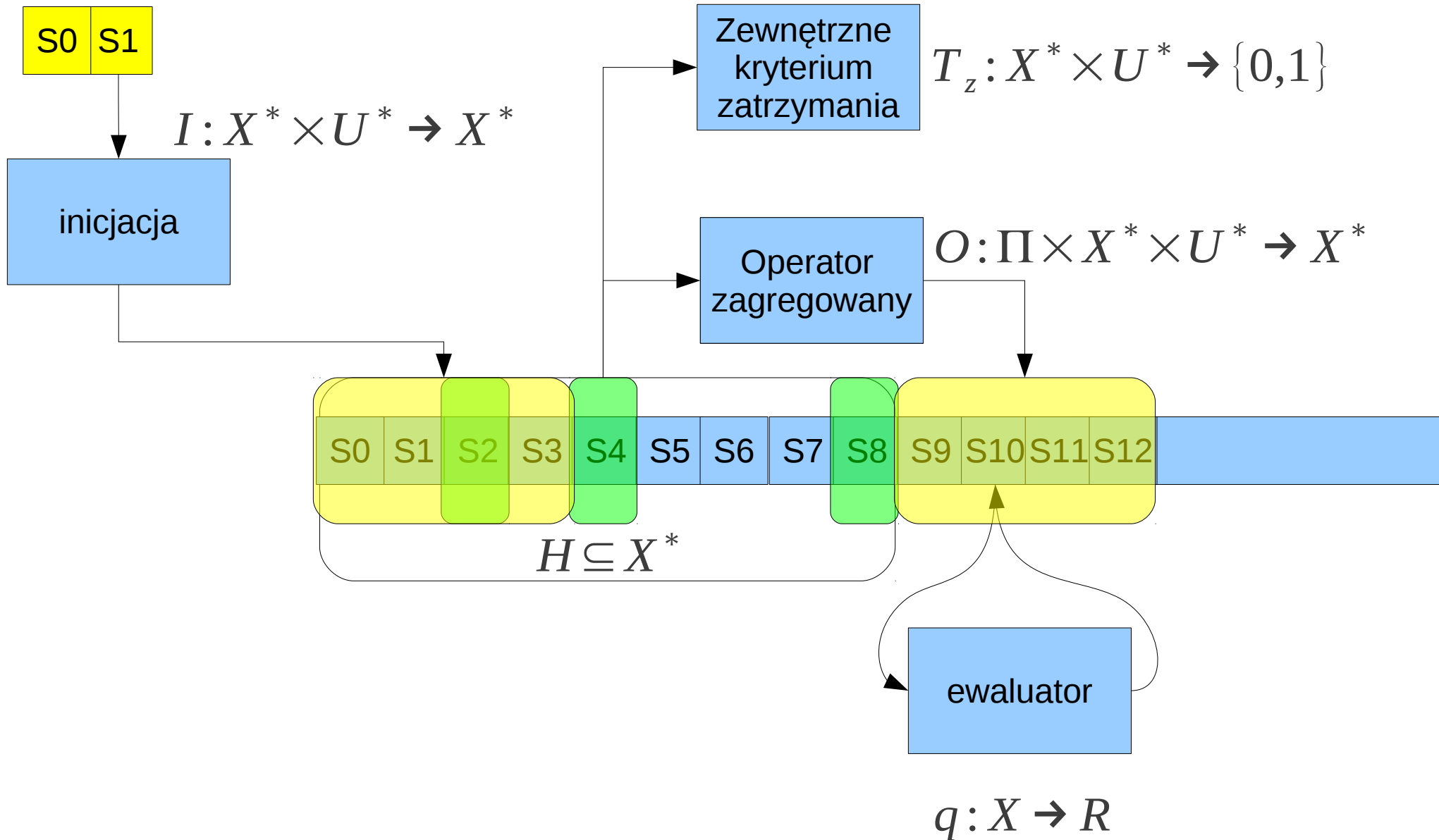
operator selekcji  $o_s: \Pi \times X^* \times M \times U^* \rightarrow X^*$

operator wariacji  $o_v: M \times X^* \times U^* \rightarrow X^*$

adaptacja stanu  $o_m: \Pi \times X^* \times M \times U^* \rightarrow M$

wewnętrzne kryt. zatrzymania  $T_w: X^* \times M \times U^* \rightarrow \{0,1\}$

# Definicja metody przeszukiwania





# Operator zagregowany

Inicjacja stanu

$$I_m: X^* \times U^* \rightarrow M$$

$$o_m: \Pi \times X^* \times M \times U^* \rightarrow M$$

adaptacja stanu

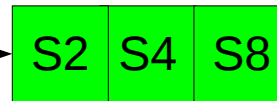
stan

$$o_s: \Pi \times M \times X^* \times U^* \rightarrow X^*$$

Wewnętrzne kryterium zatrzymania

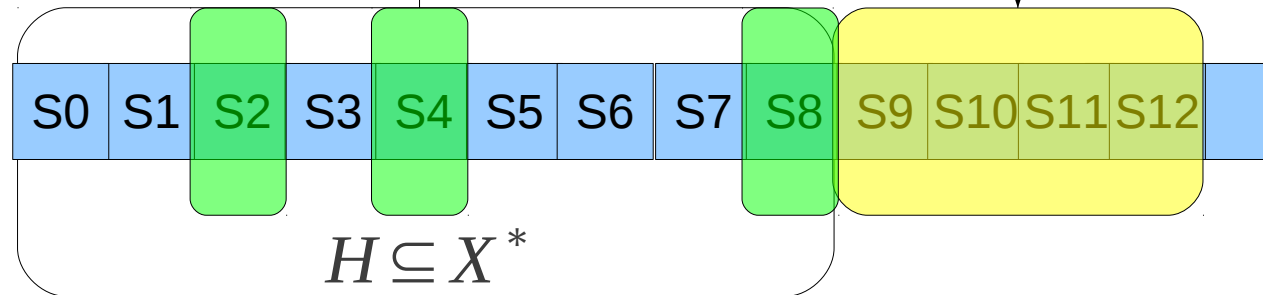
$$T_w: X^* \times M \times U^* \rightarrow \{0,1\}$$

selekcja



wariacja

$$o_v: M \times X^* \times U^* \rightarrow X^*$$



# Heurystyka a metaheurystyka

- Heurystyka  $\langle P, I, O \rangle$
- Metaheurystyka  $\langle ?, I, O \rangle$   
nieznana przestrzeń przeszukiwań  
nieznana metoda wariacji  
powiązania między selekcją a wariacją bez  
zmian

# Cechy metod przeszukiwania

- Poinformowanie
- Determinizm
- Typ stanu
- Rozmiar okna historii (pamiętliwość)
- Miętkość selekcji
- Liczba selekcjonowanych punktów
- Lokalność przeszukiwań
- Liczba generowanych punktów

# Poinformowanie

- Poinformowanie selekcji:

$$o_s: \Pi \times M \times X^* \times U^* \rightarrow X^*$$

- Poinformowanie stanu:

$$o_m: \Pi \times X^* \times M \times U^* \rightarrow M$$

- Niepoinformowanie:

$$o_s: M \times X^* \times U^* \rightarrow X^*$$

$$o_m: X^* \times M \times U^* \rightarrow M$$

*Metoda niepoinformowana działa*

*“zawsze tak samo”*

*(tzn. sekwencja H nie zależy od problemu)*

# Determinizm

- Determinizm selekcji
- Determinizm wariacji
- Determinizm adaptacji
- Determinizm:
- Niedeterminizm:

$$o_s: \Pi \times M \times X^* \times U^* \rightarrow X^*$$

$$o_v: M \times X^* \times U^* \rightarrow X^*$$

$$o_m: \Pi \times X^* \times M \times U^* \rightarrow M$$

$$U^* \equiv \emptyset$$

$$U^* \neq \emptyset$$

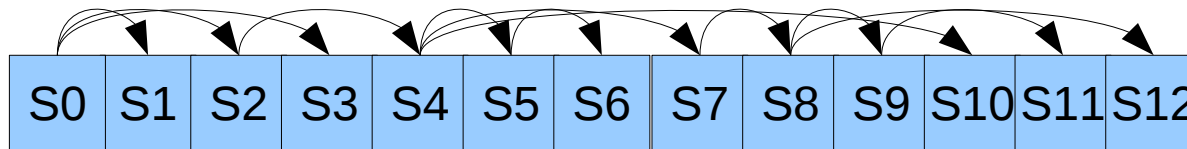
# Rozmiar okna historii (pamiętliwość)

- Maksymalna długość sekwencji dotychczas wygenerowanych punktów które są brane pod uwagę przez operator selekcji

$$o_s: \Pi \times M \times \boxed{X^*} \times U^* \rightarrow X^*$$

- Metoda bezpamięciowa  $o_s: \Pi \times M \times U^* \rightarrow X^*$
- Metoda zapominająca  $o_s: \Pi \times M \times X^k \times U^* \rightarrow X^*$   
pamięć ograniczona do ostatnich k punktów  
*mogą się zdarzać nawroty*
- Metoda niezapominająca  
pamięć nieograniczona  
*konieczna do unikania nawrotów*

# Rozmiar okna historii (pamiętliwość)



Wariacja polega na wygenerowaniu jednego punktu poprzez zmianę jednego punktu

Strzałka oznacza, że punkt jest wynikiem wariacji drugiego punktu

Jaki jest minimalny rozmiar okna historii, który prowadzi do takiej sytuacji?

# Typ reprezentacji stanu

- Wpływa na działanie selekcji i wariacji

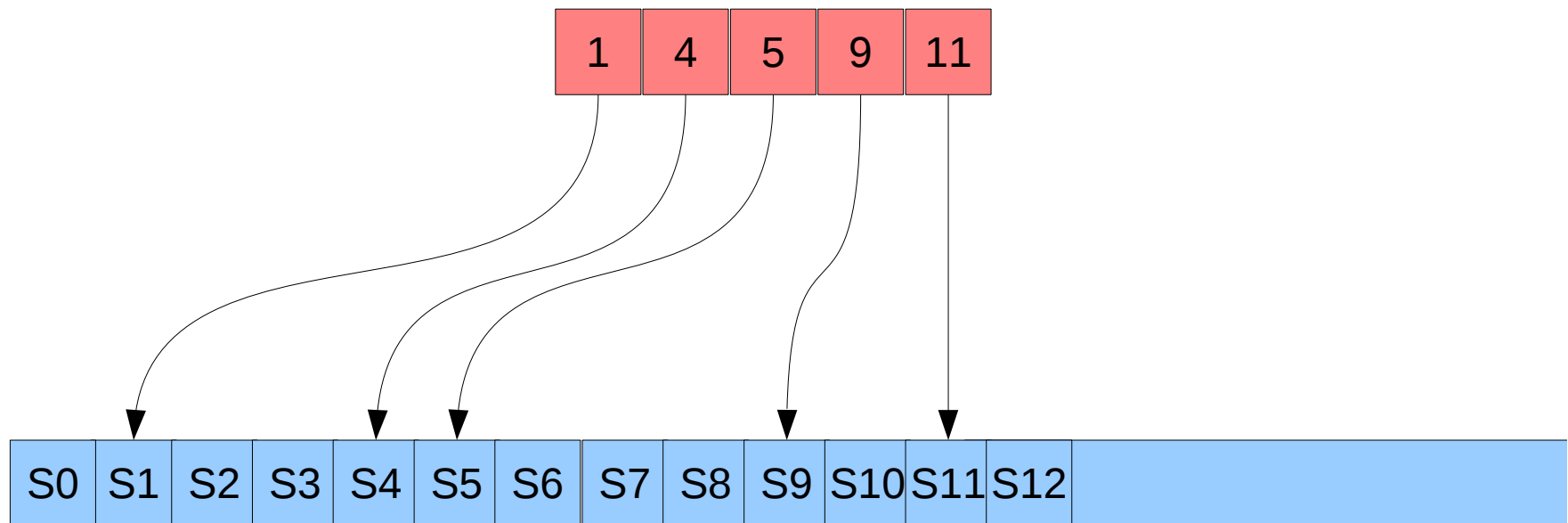
$$o_v: M \times X^* \times U^* \rightarrow X^*$$

$$o_s: \Pi \times M \times X^* \times U^* \rightarrow X^*$$

- Stan pamięciowy  $M \subseteq H$   
stan pamięta część punktów z historii
- Stan przetworzony (zagregowany)  
stanem może być np.  
*rozkład prawdopodobieństwa*



# Stan pamięciowy

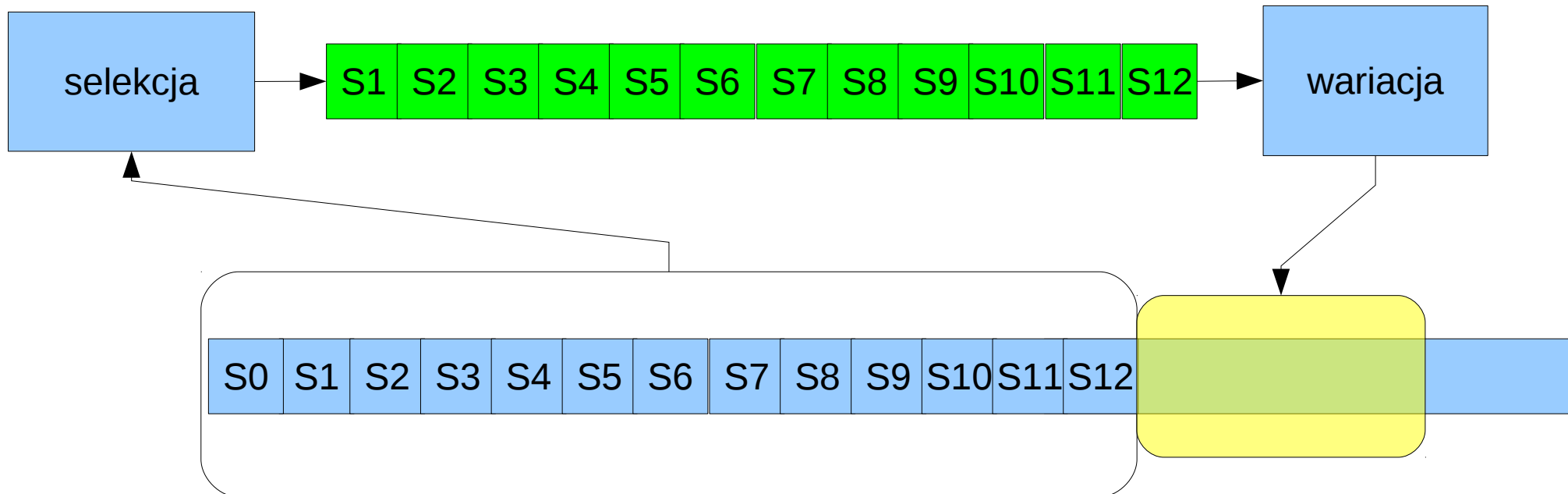
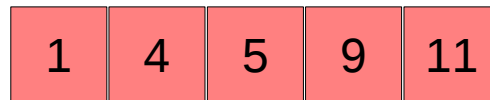


# Stan pamięciowy

Stan pamięciowy *wpływa na szerokość okna historii*

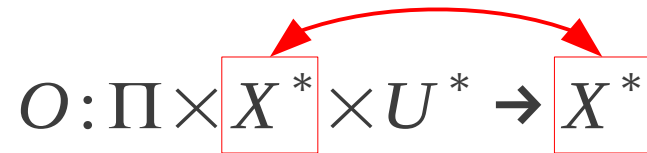
*Niektóre lub wszystkie punkty z okna historii są poddawane wariacji*

*Sposób wariacji i wybór punktów do wariacji jest uzależniony od stanu*



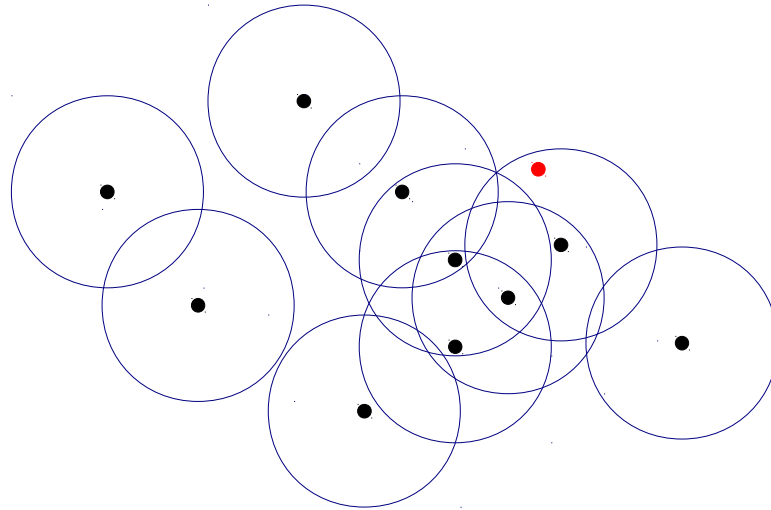
# Lokalność przeszukiwań

- Cecha operatora zagregowanego

$$O: \Pi \times \boxed{X^*} \times U^* \rightarrow \boxed{X^*}$$


- Jeśli  $H_2 = H_1 \cup O(P, H_1, u)$   
oraz  $\exists r < \text{diag}(X) \forall P \in \Pi, H_1 \in X^*, H_2 \in X^* u \in U^*$   
 $\forall y \in H_2 \exists x \in H_1 \quad y \in N_r(x)$   
wówczas metoda jest lokalna
- Metoda nielokalna jest globalna

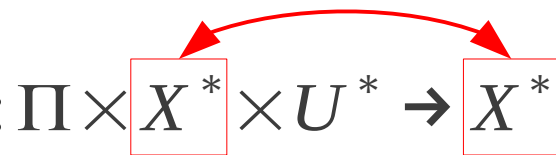
# Lokalność przeszukiwań



*Lokalność można zdefiniować  
deterministycznie lub stochastycznie*

# Stochastyczna lokalność przeszukiwań

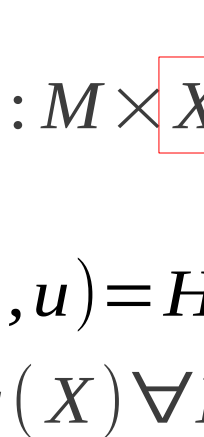
- Cecha operatora zagregowanego

$$O: \Pi \times \boxed{X^*} \times U^* \rightarrow \boxed{X^*}$$


- Jeśli  $H_2 = H_1 \cup O(P, H_1, u)$   
oraz  $\exists r < \text{diag}(X) \forall P \in \Pi, H_1 \in X^*, H_2 \in X^* u \in U^*$   
 $\forall y \in H_2 \exists x \in H_1 \text{ Prob}\{y \in N_r(x)\} \geq p$   
wówczas metoda jest stochastycznie lokalna z prawdopodobieństwem  $p$
- Metoda nielokalna jest globalna

# Lokalność przeszukiwań

- Cecha operatora wariacji

$$o_v: M \times \boxed{X^*} \times U^* \rightarrow \boxed{X^*}$$


- Jeśli  $o_v(m, H_1, u) = H_2$   
oraz  $\exists r < \text{diag}(X) \forall H_1 \in X^*, m \in M, H_2 \in X^*, u \in U^*$   
 $\forall y \in H_2 \exists x \in H_1 \quad y \in N_r(x)$   
wówczas metoda jest lokalna

# Miękkość selekcji

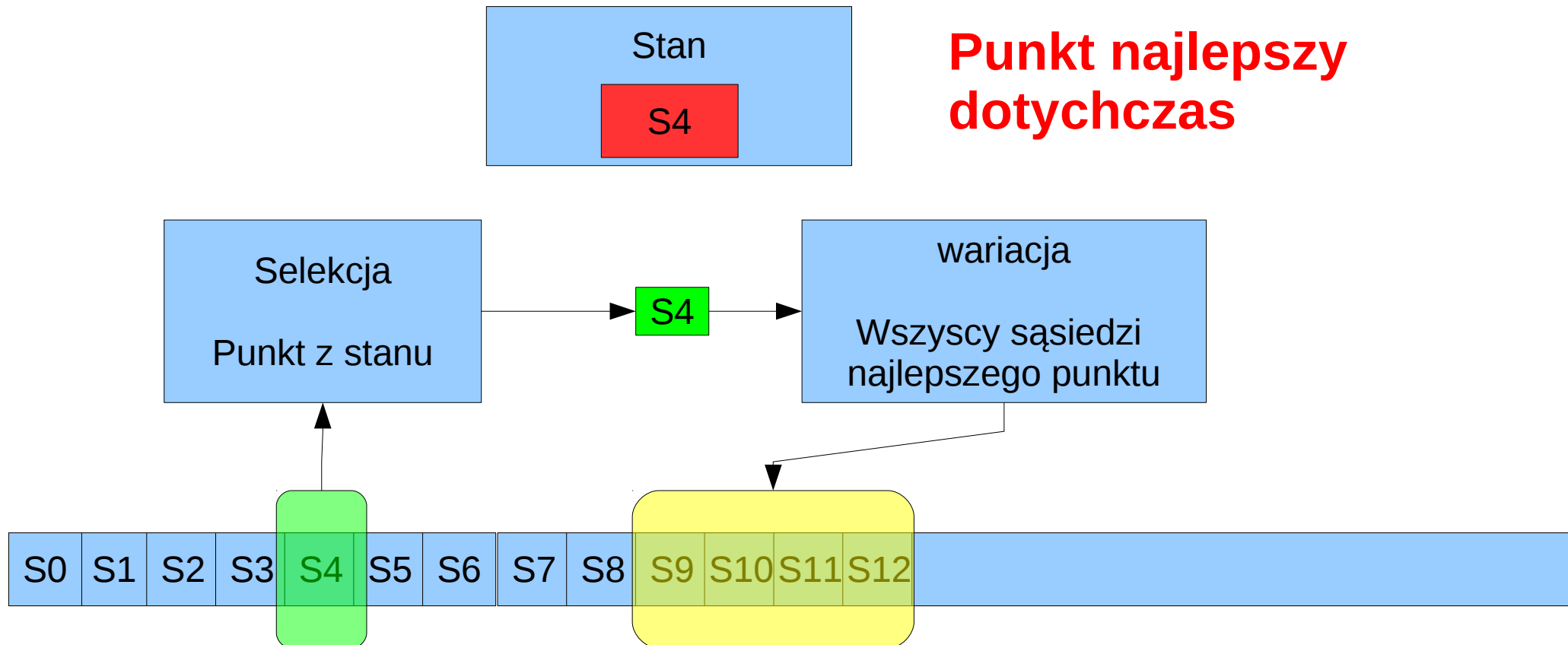
- Miękka selekcja – każdy punkt wygenerowany w iteracji  $t$  ma szansę być wybrany przez selekcję w iteracji  $t+1$

- Twarda selekcja

*Przykład: Jeśli kryterium selekcji jest oparte na funkcji celu, to twarda selekcja uniemożliwia chwilowe obniżenie jakości generowanych punktów*

# Miękkość selekcji

- *Stan pamięciowy może powodować utwardzenie selekcji – “dziury” w oknie historii*





# Zupełność

Gwarancja, że w skończonej liczbie kroków zostanie znalezione ekstremum globalne  $f$ . celu

## Asymptotyczna zupełność

Prawdopodobieństwo wygenerowania punktu należącego do dowolnego\* otoczenia maksimum globalnego wzrasta do jedności wraz z liczbą punktów

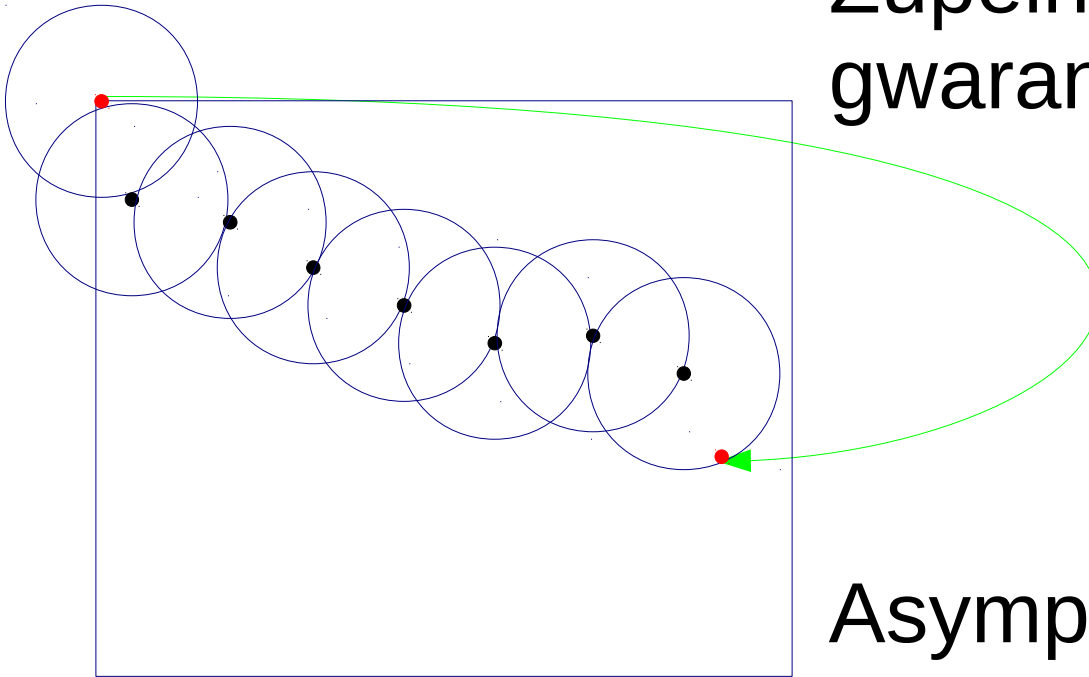
\*Wymagana jest niezerowa miara tego otoczenia

# Zupełność

- Cecha sekwencji  $H \in X^*$  generowanej przez metodę
- Jeśli  $\forall X, |X| < \infty, \exists r < \infty, \forall u \in U^*, |H| < r$  oraz  $\forall x \in X \quad x \in H$  wówczas metoda jest zupełna
- Jeśli  $\forall x, 0 < m(X) < \infty, \forall A \subseteq X, m(A) > 0 \forall u \in U^*$  zachodzi  $\lim_{|H| \rightarrow \infty} Prob \{ \exists x \in H, x \in A \} = 1$  wówczas metoda jest asymptotycznie zupełna
- W przeciwnym przypadku metoda jest cząstkowa

# Zupełność

Zupełność:  
gwarancja przejścia



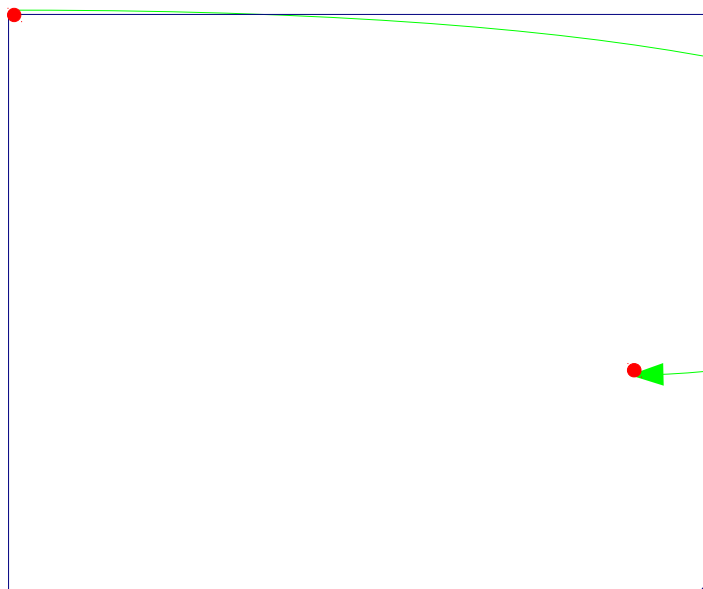
Asymptotyczna zupełność:  
p-stwo przejścia wzrasta  
z liczbą punktów

# Przepis na zupełność

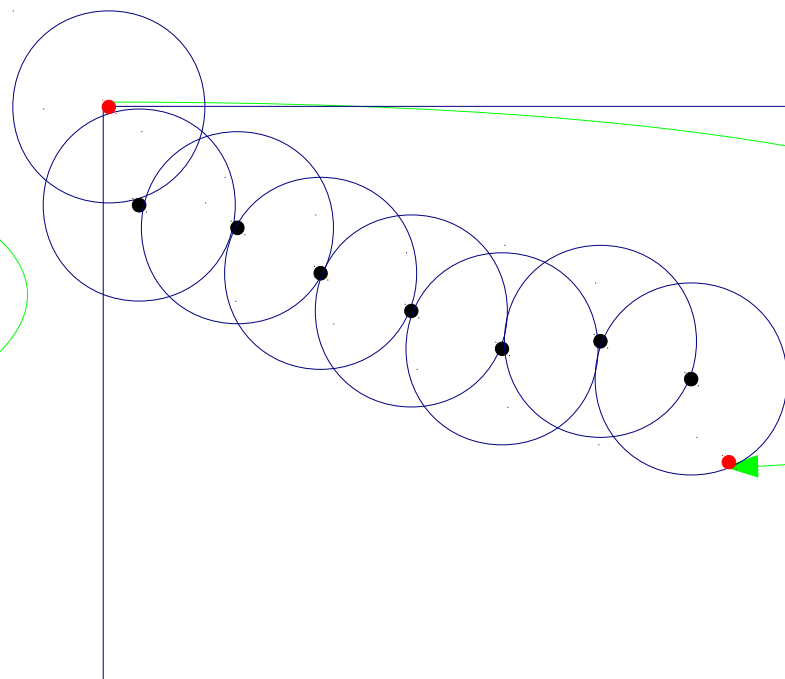
- Metoda może być zupełna jeśli
  - Jest skończenie wiele możliwych rozwiązań
  - ?
- Metoda może być asymptotycznie zupełna jeśli łączy:
  - miękką selekcję i lokalną generację
  - twardą lub miękką selekcję i globalną losową generację

# Przepis na zupełność

Poszukiwania globalne,  
selekcja dowolna



Poszukiwania lokalne  
z miękką selekcją



# Metoda wszerz

- Poinformowanie N
- Determinizm T
- Stan odwiedzone punkty (FIFO)
- Typ stanu pamięciowy
- Wielkość stanu nieograniczona
- Rozmiar okna historii nieograniczony
- Lokalność przeszukiwań T
- Miętkość selekcji T
- Zupełność T

# Metoda w głąb

- Poinformowanie N
- Determinizm T
- Stan odwiedzone punkty (LIFO)
- Typ stanu pamięciowy
- Wielkość stanu nieograniczona
- Rozmiar okna historii nieograniczony
- Lokalność przeszukiwań T
- Miętkość selekcji T
- Zupełność T

# Metoda A\*

- Poinformowanie T
- Determinizm T
- Stan odwiedzone punkty  
(kol. priorytetowa)
- Typ stanu pamięciowy
- Wielkość stanu nieograniczona
- Rozmiar okna historii nieograniczony
- Lokalność przeszukiwań T
- Miętkość selekcji T
- Zupełność T



# Metoda losowania z rozkładem jednostajnym

- Poinformowanie N
- Determinizm N
- Stan brak
- Rozmiar okna historii 0
- Lokalność przeszukiwań N
- Miętkość selekcji N
- Zupełność asymptotyczna

# Metoda błędzenia przypadkowego

- Poinformowanie N
- Determinizm N
- Stan brak
- Rozmiar okna historii 1
- Lokalność przeszukiwań *(zależy od rozkładu wariacji)*
- Miętkość selekcji T
- Zupełność asymptotyczna

# Metoda wspinaczkowa

- Poinformowanie T
- Determinizm T
- Stan pamięciowy
- Wielkość stanu 1
- Rozmiar okna historii maks. liczność sąsiedztwa
- Lokalność przeszukiwań T
- Miętkość selekcji N
- Zupełność N

# Poszukiwanie wspinaczkowe z tabu

- Poinformowanie *(zależy od organizacji listy tabu)*
- Determinizm N
- Stan lista tabu
- Typ stanu pamięciowy
- Wielkość stanu liczność listy tabu
- Rozmiar okna historii zależy od tabu
- Lokalność przeszukiwań T
- Miętkość selekcji N
- Zupełność N

# Symulowane wyżarzanie

- Poinformowanie T
- Determinizm N
- Stan temperatura,  
punkt bieżący
- Typ stanu zagregowany
- Rozmiar okna historii nieograniczone
- Lokalność przeszukiwań T/N  
*(zależy od rozkładu wariacji)*
- Miętkość selekcji T
- Zupełność asymptotyczna